

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ-ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΝΟΤΗΤΑ 6

Ακολουθίες



Συντονιστής: Χρίστου Κωνσταντίνος, Καθηγητής Πανεπιστημίου Κύπρου

Εποπτεία: Φιλίππου Ανδρέας, Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης
Γιασουμής Νικόλας, Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης
Παπαγιάννη Όλγα, Επιθεωρήτρια Μέσης Εκπαίδευσης

**Επιμέλεια
έκδοσης:** Μαρίνα Άστρα-Ιωάννου, Λειτουργός Υπηρεσίας Ανάπτυξης
Προγραμμάτων

**Συντονισμός
έκδοσης:** Χρίστος Παρπούνας, Συντονιστής Υπηρεσίας Ανάπτυξης
Προγραμμάτων

Α΄ Έκδοση 2016

Εκτύπωση: ΚΩΝΟΣ ΛΤΔ

© ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

ISBN: 978-9963-54-063-1

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΝΟΤΗΤΑ 6

Ακολουθίες

ΕΝΟΤΗΤΑ 6

ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

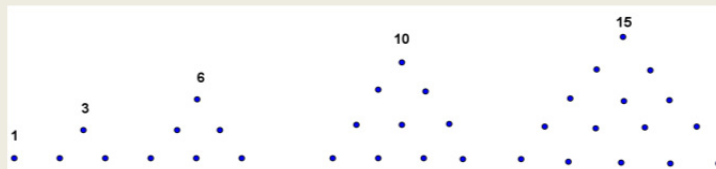
- 6.1. Εισαγωγή
- 6.2. Η έννοια της ακολουθίας
- 6.3. Μονότονες και φραγμένες ακολουθίες
- 6.4. Όριο ακολουθίας
- 6.5. Ειδικές ακολουθίες
 - 6.5.1 Αριθμητική πρόοδος
 - 6.5.2 Γεωμετρική πρόοδος

6.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ιστορικό Σημείωμα

Οι ακολουθίες αριθμών αποτέλεσαν ιστορικά ένα πολύ ενδιαφέρον θέμα για την εξέλιξη των Μαθηματικών. Σημειώματα σε πάπυρο έχουν δείξει ότι γύρω στο 2100 π.Χ. οι Βαβυλώνιοι γνώριζαν αριθμητικές και γεωμετρικές ακολουθίες. Το όνομα αριθμητική και γεωμετρική πρόοδος πιθανόν να έχει δοθεί από τη σχέση που έχει ο κάθε όρος με τον προηγούμενο και τον επόμενο του και συνδέονταν με γεωμετρικά προβλήματα. Συγκεκριμένα, σε κάθε τριάδα θετικών διαδοχικών αριθμών α, β, γ γεωμετρικής προόδου ο δεύτερος αριθμός β αποτελεί το μήκος της πλευράς ενός τετραγώνου που έχει το ίδιο εμβαδόν με ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με διαστάσεις α, γ , δηλαδή $\beta = \sqrt{\alpha\gamma}$. Με ανάλογο τρόπο, στην αριθμητική πρόοδο ο β αποτελεί την πλευρά ενός τετραγώνου που έχει την ίδια περίμετρο με ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο διαστάσεων α, γ , δηλαδή $\beta = \frac{\alpha+\gamma}{2}$.

Οι Πυθαγόρειοι, είχαν δημιουργήσει τους πολύγωνους αριθμούς. Βασικά ήταν ακολουθίες αριθμών που η γεωμετρική αναπαράστασή τους έδινε κανονικά πολύγωνα.



Όπως φαίνεται και στο πιο πάνω σχήμα, οι τρίγωνοι αριθμοί είναι 1, 3, 6, 10, 15, Είναι οι πιο απλοί πολύγωνοι αριθμοί και προκύπτουν κάθε φορά από τα μερικά αθροίσματα διαδοχικών φυσικών αριθμών 1, (1 + 2), (1 + 2 + 3), (1 + 2 + 3 + 4), Με ανάλογο τρόπο όριζαν και άλλους πολύγωνους αριθμούς όπως ήταν οι τετράγωνοι, οι πεντάγωνοι κτλ.

Ο Ζήνων ο Ελεάτης (490-425 π.Χ.) είχε διατυπώσει τα γνωστά «Παράδοξα του Ζήωνα» τα οποία ήταν συγκεκριμένες προτάσεις που εκ πρώτης όψεως φαινόταν παράλογες, αλλά στην πραγματικότητα είναι θεμελιωμένες πάνω σε σοβαρά επιχειρήματα. Το παράδοξο του Αχιλλέα και της Χελώνας αναφέρει: « Ο Αχιλλέας κυνηγά μια χελώνα η οποία προηγείται κατά μια απόσταση έστω δ . Όταν ο Αχιλλέας θα έχει καλύψει την απόσταση δ , η χελώνα θα έχει διανύσει μια νέα απόσταση δ_1 . Τη στιγμή που ο Αχιλλέας θα έχει καλύψει και την απόσταση δ_1 , η χελώνα θα προηγείται κατά μια απόσταση δ_2 κ.ο.κ «επ άπειρον». Επομένως, ο Αχιλλέας δεν θα φτάσει ποτέ τη χελώνα.

Το πιο πάνω παράδοξο, όπως και τα άλλα που είχε διατυπώσει ο Ζήνων, για να εξηγηθούν είναι απαραίτητες βασικές έννοιες όπως η ακολουθία, το όριο ακολουθίας και το άθροισμα άπειρων όρων γεωμετρικής προόδου.

Αργότερα, Ινδοί μαθηματικοί είχαν διατυπώσει τύπους υπολογισμού του αθροίσματος των n πρώτων όρων των τετραγώνων και των κύβων των φυσικών αριθμών.

Ιστορικά μια από τις πρώτες αναδρομικές ακολουθίες το 1220 στην εργασία του Liber abaci, ήταν η γνωστή ακολουθία Fibonacci: 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55, ... που περιγραφόταν από τη εξίσωση: $\alpha_n = \alpha_{n-1} + \alpha_{n-2}$, $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1$

όπου η λύση της έδινε το συνολικό πλήθος κουνελιών μετά από n μήνες όταν ένα αρχικό ζεύγος κουνελιών έδινε ένα νέο ζεύγος από κουνέλια και κάθε νέο ζεύγος με τη σειρά του έδινε και αυτό μετά τον 1ο μήνα (κάθε μήνα) ένα νέο ζεύγος.

6.2 Η ΕΝΝΟΙΑ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ

Εξερεύνηση

Να προβλέψετε τους επόμενους τρεις αριθμούς, αιτιολογώντας την απάντησή σας:
1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, ...

Διερεύνηση

Δίνονται οι αριθμοί $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{100}, \frac{1}{101}, \dots$

- (α) Να βρείτε ποιος αριθμός θα είναι στην 8^η θέση και ποιος στην 105^η θέση.
- (β) Να βρείτε έναν τύπο που να συνδέει τον κάθε αριθμό με τη θέση του.
- (γ) Να αποδείξετε ότι ο πιο πάνω τύπος αποτελεί συνάρτηση και να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της.

6.2.1 Ορισμός-Αναπαράσταση ακολουθίας

Στις πιο κάτω περιπτώσεις παρουσιάζονται αριθμοί γραμμένοι με διαδοχική σειρά. Στόχος είναι η αναζήτηση των επόμενων αριθμών.

- ✓ 6, 10, 14, 18, 22, 26, ...
- ✓ 2, 3, 5, 7, 11, 13, ...
- ✓ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$
- ✓ 2, 7, 22, 67, 202, 607, ...

Οι τελείες στο τέλος δηλώνουν ότι ακολουθούν και άλλοι άπειροι αριθμοί. Με την αναγραφή ορισμένων αρχικών αριθμών, ίσως να μην είναι και τόσο εύκολο να υπολογίζουμε κάθε φορά τον επόμενο αριθμό. Έτσι, προσπαθούμε να βρούμε πιο σύντομους και ακριβείς τρόπους ή συμβολισμούς, που να απλουστεύουν το συγκεκριμένο πρόβλημα, ώστε να μπορούμε να υπολογίσουμε σε κάθε θέση οποιοδήποτε αριθμό.

Ορισμός:

Κάθε συνάρτηση a , με πεδίο ορισμού το $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ και τιμές σε ένα υποσύνολο B του $\mathbb{R}$, λέγεται **ακολουθία πραγματικών αριθμών**.

Συμβολικά έχουμε $a: \mathbb{N} \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}$

Παρατηρήσεις

Η τιμή μιας ακολουθίας στην n -οστή θέση, δηλαδή ο πραγματικός αριθμός $a(n)$, $n \in \mathbb{N}$ λέγεται νιοστός όρος (συμβολίζεται με (a_n) , $n \in \mathbb{N}$ και διαβάζεται «α με δείκτη n »). Ισχύει δηλαδή:

$$a(1) = a_1, a(2) = a_2, \dots, a(n) = a_n, \dots$$

Τα στοιχεία του πεδίου ορισμού μιας ακολουθίας, δηλαδή τα πρότυπα της συνάρτησης, τα λέμε **δείκτες** και τις εικόνες των δεικτών **όρους** της ακολουθίας. Έτσι,

- ✓ ο a_1 ονομάζεται πρώτος όρος της ακολουθίας

- ✓ ο a_2 ονομάζεται δεύτερος όρος της ακολουθίας
- ✓
- ✓ ο a_n ονομάζεται **νιοστός ή γενικός όρος** της ακολουθίας.

Ο γενικός όρος a_n μιας ακολουθίας βρίσκεται στη n –θέση και περιγράφει για κάθε τιμή του φυσικού αριθμού n τον συγκεκριμένο όρο, χωρίς να σημαίνει ότι είναι ο τελευταίος όρος.

Μια ακολουθία $(a_n), n \in \mathbb{N}$, είναι **τελείως ορισμένη**, όταν υπάρχει η δυνατότητα να υπολογίζουμε οποιοδήποτε όρο της ακολουθίας.

Έτσι, μια ακολουθία ορίζεται πλήρως όταν:

➤ **Ο γενικός όρος a_n δίνεται με τύπο.**

Για παράδειγμα, οι ακολουθίες:

- $a_n = 2n + 1, n \in \mathbb{N}$, ή
- $\beta_n = \begin{cases} 5, & n \text{ περιττός} \\ 10, & n \text{ άρτιος} \end{cases}$

ορίζονται πλήρως $\forall n \in \mathbb{N}$.

➤ **Δίνεται ικανοποιητικό πλήθος αρχικών όρων και ένας αναγωγικός τύπος.**

Για παράδειγμα, οι ακολουθίες,

- $a_{n+1} = a_n + 7, a_1 = 2$ ή
- $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, a_1 = a_2 = 1$

ορίζονται πλήρως.

Όταν υπάρχει μια σχέση, που συνδέει δύο ή περισσότερους γενικούς όρους μιας ακολουθίας, η σχέση αυτή ονομάζεται **αναγωγικός ή αναδρομικός τύπος** της ακολουθίας. Για παράδειγμα,

- ✓ η σχέση $a_{n+1} = a_n + 7$ είναι ένας αναγωγικός τύπος πρώτης τάξης, γιατί συνδέει δύο διαδοχικούς γενικούς όρους (δηλαδή τον όρο a_n και τον επόμενο του a_{n+1}).
- ✓ η σχέση $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, είναι ένας αναγωγικός τύπος δεύτερης τάξης, γιατί συνδέει τρεις διαδοχικούς γενικούς όρους.

Παρατηρήσεις:

- ✓ Όταν δίνονται μερικοί αρχικοί όροι της ακολουθίας, θεωρούμε ότι η ακολουθία δεν ορίζεται πλήρως. Για παράδειγμα, η ακολουθία $(a_n), n \in \mathbb{N}$, στην οποία δίνονται οι πρώτοι όροι της με $a_1 = 0, a_2 = 2, a_3 = 4, a_4 = 6, \dots$ είναι δυνατόν:
 - (α) να έχει γενικό τύπο $a_n = 2n$ ή
 - (β) να έχει γενικό τύπο $\beta_n = 2n + n(n-1)(n-2)(n-3)$

Παρατηρούμε ότι και οι δύο ακολουθίες έχουν μόνο τους ίδιους τέσσερις πρώτους όρους. Επομένως, η ακολουθία δεν είναι τελείως ορισμένη όταν δίνονται μόνο κάποιοι αρχικοί όροι.

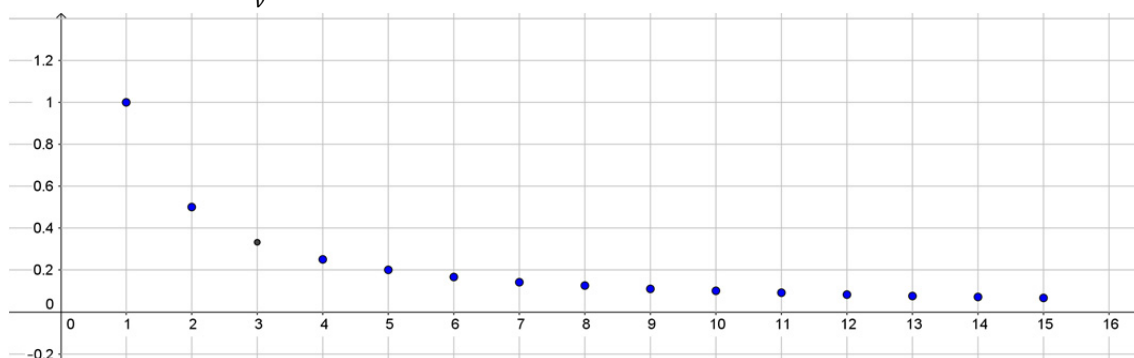
✓ Όταν δίνεται μόνο ο αναγωγικός τύπος μιας ακολουθίας, τότε αυτή δεν ορίζεται πλήρως. Πρέπει να έχει δοθεί και ικανοποιητικό πλήθος όρων. Για παράδειγμα,

- η ακολουθία $a_{n+1} = 3a_n + 4, a_1 = 0$, δίνει τους όρους 4, 16, 52, 160, ..., ενώ
- η ακολουθία $a_{n+1} = 3a_n + 4, a_1 = 1$, δίνει τους όρους 7, 25, 79, 241, ...

Οι ακολουθίες αυτές είναι διαφορετικές αν και έχουν τον ίδιο αναγωγικό τύπο.

✓ Σε μια ακολουθία το πλήθος των όρων της δεν είναι πεπερασμένο ενώ το σύνολο των τιμών της είναι δυνατόν να είναι πεπερασμένο. Για παράδειγμα, η ακολουθία $a_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$, έχει άπειρο το πλήθος όρων το $-1, 1, -1, 1, -1, \dots$, ενώ το σύνολο των τιμών της είναι μόνο το $\{-1, 1\}$.

➤ Αφού η ακολουθία είναι συνάρτηση, έτσι και για κάθε ακολουθία, το γράφημα της είναι το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών $G = \{(1, a_1), \dots, (n, a_n), \dots, n \in \mathbb{N}\}$, στο οποίο αντιστοιχεί ένα σύνολο σημείων σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων. Η ακολουθία $a_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$ έχει την πιο κάτω γραφική παράσταση.



Παράδειγμα 1:

Να γράψετε τους 4 πρώτους όρους των ακολουθιών με γενικούς όρους

(α) $a_n = \frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}$

(β) $a_n = n(-1)^n, n \in \mathbb{N}$

(γ) $a_n = \begin{cases} 1, & n \text{ περιττός} \\ 0, & n \text{ άρτιος} \end{cases}, n \in \mathbb{N}$

(δ) $a_n = 2, n \in \mathbb{N}$

Λύση:

(α) $a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}, a_3 = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}, a_4 = \frac{4}{4+1} = \frac{4}{5}$

(β) $a_1 = 1(-1)^1 = -1, a_2 = 2(-1)^2 = 2, a_3 = 3(-1)^3 = -3, a_4 = 4(-1)^4 = 4$

(γ) $\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 1, \quad \alpha_4 = 0$

(δ) $\alpha_1 = 2, \quad \alpha_2 = 2, \quad \alpha_3 = 2, \quad \alpha_4 = 2$

Παράδειγμα 2:

Δίνεται η ακολουθία $a_n, n \in \mathbb{N}$ με γενικό όρο $a_n = 3n^2 + 2n$.

(α) Να υπολογίσετε τον 10^ο όρο της

(β) Να υπολογίσετε τη διαφορά $a_{n+1} - a_n$.

Λύση:

(α) Για $n = 10$ έχουμε τον 10 ο όρο $a_{10} = 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 = 320$

(β) $a_{n+1} - a_n = [3(n+1)^2 + 2(n+1) - (3n^2 + 2n)] = 3n^2 + 6n + 3 + 2n + 2 - 3n^2 - 2n$
 $= 6n + 5, n \in \mathbb{N}$

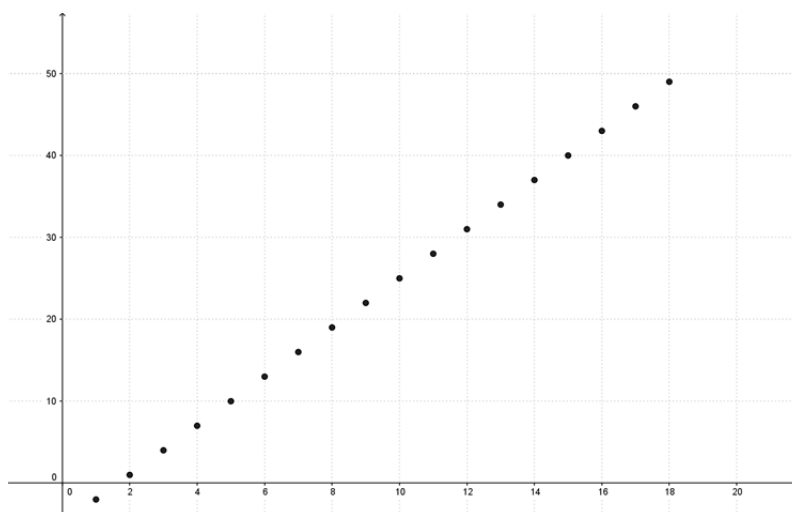
Παράδειγμα 3:

Να γράψετε τους 5 πρώτους όρους της ακολουθίας που εκφράζεται με τον αναδρομικό τύπο $a_{n+1} = a_n + 3, \quad a_1 = -1$ και να την παραστήσετε γραφικά.

Λύση:

$$a_1 = -1, a_2 = a_1 + 3 = 2, a_3 = a_2 + 3 = 5, a_4 = a_3 + 3 = 8, a_5 = a_4 + 3 = 11$$

Μέρος της γραφικής παράστασης φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.



Παράδειγμα 4:

Δίνεται η ακολουθία 3, 6, 12, 24, 48, 96, Να βρείτε μια σχέση που να συνδέει κάθε όρο με τον προηγούμενο του (με εξαίρεση τον πρώτο όρο).

Λύση:

Παρατηρούμε ότι κάθε όρος (εκτός από τον πρώτο) προκύπτει όταν διπλασιάσουμε τον προηγούμενό του.

Άρα, $a_{n+1} = 2a_n, a_1 = 3$.

Παράδειγμα 5:

Να βρείτε έναν αναδρομικό τύπο για την ακολουθία $a_n, n \in \mathbb{N}$ με γενικό όρο $a_n = 4n + 3$.

Λύση:

Γράφουμε 3 όρους της ακολουθίας $a_1 = 7, a_2 = 11, a_3 = 15$.

Παρατηρούμε ότι ο κάθε όρος, μετά από τον πρώτο όρο, προκύπτει αν προσθέσουμε 4 στον προηγούμενο όρο. Επομένως, υπάρχει ένδειξη ότι ένας αναδρομικός τύπος για την ακολουθία είναι $a_{n+1} = a_n + 4, a_1 = 7$.

Θα αποδείξουμε ότι $a_{n+1} = a_n + 4, \forall n \in \mathbb{N}$.

$$a_{n+1} = 4(n+1) + 3 = 4n + 4 + 3 = 4n + 3 + 4 = a_n + 4 \Rightarrow a_{n+1} = a_n + 4, a_1 = 7.$$

Παράδειγμα 6:

Να βρείτε τον νιοστό όρο της ακολουθίας:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots$$

Λύση:

Αναζητούμε μια σχέση που να συνδέει τον κάθε όρο με τη θέση του. Παρατηρούμε ότι κάθε όρος είναι κλάσμα γραμμένο στη μορφή $\frac{\alpha_n}{\beta_n}$.

Σε κάθε κλάσμα οι αριθμητές είναι όροι της ακολουθίας α_n : 1, 2, 3, 4, 5, ...

Επομένως, ο γενικός όρος της ακολουθίας είναι $\alpha_n = n$.

Σε κάθε κλάσμα οι παρονομαστές είναι όροι της ακολουθίας β_n : 2, 3, 4, 5, 6, ...

Επομένως, ο γενικός όρος της ακολουθίας είναι $\beta_n = n + 1$.

Άρα, ο γενικός όρος της ακολουθίας είναι: $\frac{\alpha_n}{\beta_n} = \frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}$.

Δραστηριότητες

1. Να γράψετε τους 6 πρώτους όρους των ακολουθιών.

(α) $a_n = n + 2, n \in \mathbb{N}$

(β) $a_n = n^2 - 3, n \in \mathbb{N}$

(γ) $a_n = 3^n, n \in \mathbb{N}$

(δ) $a_n = (-4)^n, n \in \mathbb{N}$

(ε) $a_n = (-1)^n + 1, n \in \mathbb{N}$

(στ) $a_n = \eta\mu \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{N}$

(ζ) $a_{n+1} = a_n - 2, a_1 = 2$

(η) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 4, a_1 = -3$

(θ) $a_{n+1} = a_n^3, a_1 = -1$

2. Να παραστήσετε γραφικά τις ακολουθίες με γενικό όρο:

(α) $a_n = 3n - 2$

(β) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

(γ) $a_n = \eta\mu \frac{n\pi}{4}$

3. Δίνεται η ακολουθία $a_n, n \in \mathbb{N}$ με αναδρομικό τύπο $a_{n+1} = 3a_n - 4, a_1 = 2$. Να γράψετε τους πέντε πρώτους όρους της ακολουθίας και να την παραστήσετε γραφικά.

4. Δίνεται η ακολουθία $a_n, n \in \mathbb{N}$ με τύπο $a_n = n^2 + n + 1$. Να βρείτε την τιμή του n ώστε να ισχύει $a_n = 57$.

5. Να βρείτε τον νιοστό όρο των πιο κάτω ακολουθιών:

(α) $-1, 2, -3, 4, \dots$

(β) $\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \dots$

6. Δίνεται ακολουθία $a_n, n \in \mathbb{N}$ με γενικό όρο $a_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$

(α) Να γράψετε τους 4 πρώτους όρους της.

(β) Να δείξετε ότι $a_{n+1} - a_n = 2n + 1$.

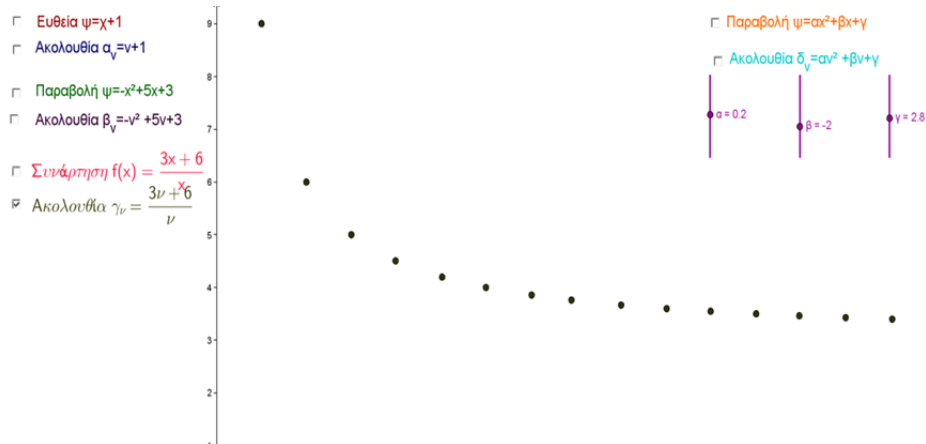
(γ) Να υπολογίσετε τον γενικό όρο της.

7. Να ορίσετε πλήρως την ακολουθία *Fibonacci* και να γράψετε τους 10 πρώτους όρους της.

6.3 ΜΟΝΟΤΟΝΕΣ ΚΑΙ ΦΡΑΓΜΕΝΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

Διερεύνηση

Να ανοίξετε το αρχείο «ακολουθίες.ggb».



- (α) Να εξετάσετε σε ποια από τις ακολουθίες $a_\nu, \beta_\nu, \gamma_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι ο κάθε όρος της είναι μεγαλύτερος από τον προηγούμενό του.
- (β) Να εξετάσετε για ποια από τις ακολουθίες $a_\nu, \beta_\nu, \gamma_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι ο κάθε όρος της είναι μικρότερος από τον προηγούμενό του.
- (γ) Να αλλάξετε τις τιμές των δρομέων α, β και γ έτσι ώστε για τους όρους της ακολουθίας δ_ν να ισχύει ότι ο κάθε όρος της
- είναι μεγαλύτερος από τον προηγούμενο του.
 - είναι μικρότερος από τον προηγούμενο του.
 - είναι ίσος με τον προηγούμενο του.

6.3.1 Ορισμός μονότονων ακολουθιών

Ορισμός:

- Μια ακολουθία λέγεται **γνησίως αύξουσα**, όταν κάθε όρος της είναι μεγαλύτερος από τον προηγούμενό του.
Δηλαδή, ισχύει ότι $a_{\nu+1} > a_\nu, \forall \nu \in \mathbb{N}$
- Μια ακολουθία λέγεται **αύξουσα**, όταν κάθε όρος της είναι μεγαλύτερος ή ίσος από με τον προηγούμενό του.
Δηλαδή, ισχύει $a_{\nu+1} \geq a_\nu, \forall \nu \in \mathbb{N}$
- Μια ακολουθία λέγεται **γνησίως φθίνουσα**, όταν κάθε όρος της είναι μικρότερος από τον προηγούμενό του.
Δηλαδή, ισχύει $a_{\nu+1} < a_\nu, \forall \nu \in \mathbb{N}$
- Μια ακολουθία λέγεται **φθίνουσα**, όταν κάθε όρος της είναι μικρότερος ή ίσος από τον προηγούμενό του.
Δηλαδή, ισχύει $a_{\nu+1} \leq a_\nu, \forall \nu \in \mathbb{N}$
- Μια ακολουθία λέγεται **σταθερή**, όταν κάθε επόμενος όρος της είναι ίσος με τον προηγούμενό του.
Δηλαδή, ισχύει $a_{\nu+1} = a_\nu, \forall \nu \in \mathbb{N}$

Παράδειγμα 1:

Να δείξετε ότι:

- (α) Η ακολουθία $a_n = n^2, n \in \mathbb{N}$ είναι γνησίως αύξουσα.
(β) Η ακολουθία $a_n = \frac{1}{n+3}, n \in \mathbb{N}$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Λύση:

- (α) Γράφουμε τους τρεις πρώτους 3 όρους της ακολουθίας: $a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 9$.
Παρατηρούμε ότι ο κάθε όρος είναι μεγαλύτερος από τον προηγούμενό του.
Επομένως, υπάρχει ένδειξη ότι η ακολουθία είναι γνησίως αύξουσα.
Θα αποδείξουμε ότι $a_{n+1} > a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ή ισοδύναμα $a_{n+1} - a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$,
 $a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$.
Το $2n + 1 > 0, n \in \mathbb{N}$, τότε $a_{n+1} - a_n > 0 \Leftrightarrow a_{n+1} > a_n, \forall n \in \mathbb{N}$.
Επομένως, η ακολουθία είναι γνησίως αύξουσα.
- (β) Παρατηρούμε ότι $a_1 = \frac{1}{4}, a_2 = \frac{1}{5}, a_3 = \frac{1}{6}$ και επομένως υπάρχει ένδειξη ότι η ακολουθία είναι γνησίως φθίνουσα.
Θα αποδείξουμε ότι $a_{n+1} < a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ή ισοδύναμα $a_{n+1} - a_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$.
$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+3} = \frac{n+3-n-4}{(n+3)(n+4)} = \frac{-1}{(n+3)(n+4)}$$

Αφού, $\frac{-1}{(n+3)(n+4)} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$ τότε $a_{n+1} - a_n < 0 \Leftrightarrow a_{n+1} < a_n, \forall n \in \mathbb{N}$.
Επομένως, η ακολουθία είναι γνησίως φθίνουσα.

Παράδειγμα 2:

Να δώσετε παράδειγμα ακολουθίας (αν υπάρχει) που να είναι:

- (α) Αύξουσα αλλά όχι γνησίως αύξουσα.
(β) Γνησίως φθίνουσα αλλά όχι φθίνουσα.
(γ) Αύξουσα και φθίνουσα ταυτόχρονα.

Λύση:

- (α) Μια τέτοια ακολουθία είναι 1,1,2,3,3,4, ... (έχει τουλάχιστον δύο διαδοχικούς όρους ίσους).
- (β) Δεν υπάρχει τέτοια ακολουθία, γιατί κάθε γνησίως φθίνουσα ακολουθία είναι φθίνουσα. Δηλαδή όταν ισχύει διάταξη $a_1 > a_2 > \dots > a_n > a_{n+1} > \dots$ τότε ισχύει και η διάταξη $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \dots$
- (γ) Η μοναδική ακολουθία που είναι αύξουσα και φθίνουσα ταυτόχρονα είναι η ακολουθία για την οποία ισχύει: $(a_{n+1} \geq a_n) \wedge (a_{n+1} \leq a_n) \Rightarrow (a_{n+1} = a_n)$. Αφού κάθε όρος είναι ίσος με τον επόμενο του, τότε η ακολουθία είναι σταθερή.
Μια τέτοια ακολουθία είναι 3,3,3,3, ... η οποία είναι η σταθερή ακολουθία και μπορούμε να γράψουμε ισοδύναμα $a_n = 3, \forall n \in \mathbb{N}$.

Παράδειγμα 3:

Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τις πιο κάτω ακολουθίες:

(α) $a_{n+1} = a_n^2 + 3, \quad a_1 = 1, n \in \mathbb{N}$

(β) $a_n = (-2)^n, n \in \mathbb{N}$

Λύση:

(α) Παρατηρούμε ότι $a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 7$.

Θεωρούμε τη διαφορά $a_{n+1} - a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

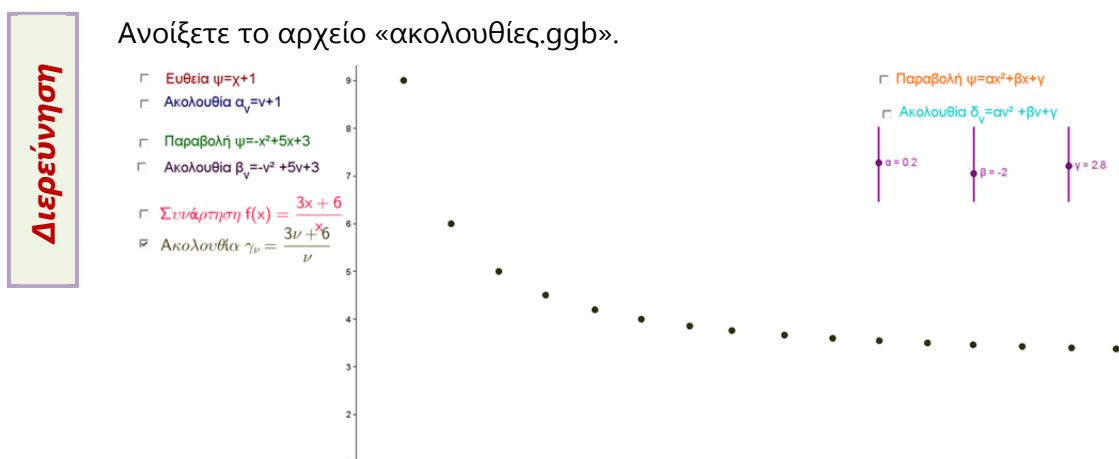
Έχουμε, $a_{n+1} - a_n = a_n^2 + 3 - a_n = a_n^2 - a_n + 3$ το οποίο είναι της μορφής τριωνύμου. Το τριώνυμο είναι θετικό για όλες τις τιμές του a_n γιατί, η διακρίνουσα του είναι $\Delta = (-1)^2 - 12 = -11 < 0$ και ο συντελεστής του a_n^2 είναι θετικός.

Άρα, $a_n^2 - a_n + 3 > 0$ για όλες τις τιμές του a_n .

Αφού, $a_{n+1} - a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η ακολουθία είναι γνησίως αύξουσα.

(β) Παρατηρούμε ότι $a_1 = -2, a_2 = 4, a_3 = -8$ και επομένως η ακολουθία δεν είναι μονότονη, γιατί $a_1 < a_2$ και $a_2 > a_3$.

6.3.2 Ορισμός φραγμένων ακολουθιών



(α) Να εξετάσετε αν υπάρχουν αριθμοί $\kappa \in \mathbb{R}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, τέτοιοι ώστε

i. $\alpha_n \geq \kappa, \forall n \in \mathbb{N}$

ii. $\beta_n \leq \lambda, \forall n \in \mathbb{N}$

iii. $\gamma_n \leq \lambda, \forall n \in \mathbb{N}$

(β) Να αλλάξετε τις τιμές των δρομέων α, β και γ , έτσι ώστε για τους όρους της ακολουθίας δ_n να ισχύει ότι

i. $\delta_n \geq \kappa, \forall n \in \mathbb{N}$

ii. $\delta_n \leq \lambda, \forall n \in \mathbb{N}$

iii. $\kappa \leq \delta_n \leq \lambda, \forall n \in \mathbb{N}$

Ορισμός:

- Μία ακολουθία $(a_n), n \in \mathbb{N}$ είναι **άνω φραγμένη** όταν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει $a_n \leq \lambda, \forall n \in \mathbb{N}$. Ο αριθμός λ είναι **ένα άνω φράγμα** της ακολουθίας.
- Μία ακολουθία $(a_n), n \in \mathbb{N}$ είναι **κάτω φραγμένη**, όταν υπάρχει $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $\kappa \leq a_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Ο αριθμός κ είναι **ένα κάτω φράγμα** της ακολουθίας.
- Μία ακολουθία $(a_n), n \in \mathbb{N}$ είναι **φραγμένη**, όταν υπάρχουν δύο πραγματικοί αριθμοί κ, λ , ώστε να ισχύει $\kappa \leq a_n \leq \lambda, \forall n \in \mathbb{N}$.

Πιο ειδικά μπορούμε να πούμε ότι η ακολουθία $(a_n), n \in \mathbb{N}$ είναι **φραγμένη**, όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός θ , ώστε να ισχύει $|a_n| \leq \theta, \theta \in \mathbb{R}$.

Από τον ορισμό προκύπτει ότι μια φραγμένη ακολουθία είναι και κάτω φραγμένη και άνω φραγμένη.

Παράδειγμα 4:

Να αποδείξετε ότι η ακολουθία με γενικό όρο

- (α) $a_n = 3^n$ είναι κάτω φραγμένη
- (β) $a_n = -n^2$ είναι άνω φραγμένη
- (γ) $a_n = \frac{4}{n}$ είναι φραγμένη

Λύση:

- (α) Αρκεί να βρούμε ένα κάτω φράγμα για την ακολουθία $a_n = 3^n$.
Ένα κάτω φράγμα για την ακολουθία είναι το 3, γιατί ισχύει ότι $n \geq 1 \Leftrightarrow 3^n \geq 3, \forall n \in \mathbb{N}$ και επομένως είναι κάτω φραγμένη.
- (β) Ένα άνω φράγμα για την ακολουθία είναι το -1 , γιατί ισχύει ότι $n \geq 1 \Rightarrow n^2 \geq 1 \Rightarrow -n^2 \leq -1, \forall n \in \mathbb{N}$ και επομένως είναι άνω φραγμένη.
- (γ) Αρκεί να βρούμε ένα κάτω και ένα άνω φράγμα για την ακολουθία $a_n = \frac{4}{n}$.
Ένα κάτω φράγμα για την ακολουθία είναι το 0, γιατί ισχύει ότι $\frac{4}{n} \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ και άνω φράγμα για την ακολουθία είναι το 4, γιατί ισχύει ότι $\frac{4}{n} \leq 4, \forall n \in \mathbb{N}$
Συνεπώς, ισχύει ότι $0 \leq \frac{4}{n} \leq 4$ και επομένως η ακολουθία είναι φραγμένη.

Παράδειγμα 5:

Να δείξετε ότι οι πιο κάτω ακολουθίες είναι φραγμένες.

- (α) $a_n = \frac{2n}{2n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$
- (β) $a_n = \frac{1}{n} \eta \mu n, \forall n \in \mathbb{N}$

Λύση:

- (α) Παρατηρούμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ο αριθμητής είναι μικρότερος από τον παρονομαστή και επομένως $a_n < 1$.
Η ακολουθία είναι φραγμένη, γιατί $0 \leq a_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}$
- (β) Η ακολουθία είναι φραγμένη, γιατί
Αν $n \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{n} \leq 1$, επομένως $\left| \frac{\eta \mu n}{n} \right| \leq \frac{1}{n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Παράδειγμα 6:

Δίνεται η ακολουθία με γενικό όρο $a_n = 2 - \frac{1}{2^n}$

- (α) Να αποδείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα.
- (β) Να βρείτε ποιοι πραγματικοί αριθμοί αποτελούν άνω φράγμα για την ακολουθία.
- (γ) Να βρείτε το ελάχιστο άνω φράγμα.

Λύση:

- (α) Αρκεί να δείξουμε ότι $a_{n+1} > a_n, \forall n \in \mathbb{N}$

$$a_{n+1} > a_n \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{2^{n+1}} > 2 - \frac{1}{2^n} \Leftrightarrow -\frac{1}{2 \cdot 2^n} > -\frac{1}{2^n} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} > -1 \Leftrightarrow 2 > 1$$

Συνεπώς, $a_{n+1} > a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και επομένως η ακολουθία είναι γνησίως αύξουσα.

- (β) Ισχύει ότι

$$-\frac{1}{2^n} < 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{2^n} < 2 \Leftrightarrow a_n < 2, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Συνεπώς, όλοι οι πραγματικοί αριθμοί που είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι με το 2 είναι άνω φράγματα της ακολουθίας.

- (γ) Από το (β) προκύπτει ότι το ελάχιστο άνω φράγμα είναι το 2. Δεν υπάρχει δηλαδή αριθμός μικρότερος του 2, ο οποίος να αποτελεί άνω φράγμα της a_n .

Δραστηριότητες

1. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ την καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

- | | |
|--|-------------|
| (α) Κάθε σταθερή ακολουθία είναι αύξουσα. | ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ |
| (β) Κάθε γνησίως φθίνουσα ακολουθία είναι φθίνουσα. | ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ |
| (γ) Κάθε αύξουσα ακολουθία είναι γνησίως αύξουσα. | ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ |
| (δ) Κάθε ακολουθία που είναι αύξουσα και φθίνουσα είναι σταθερή. | ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ |
| (ε) Κάθε γνησίως αύξουσα ακολουθία είναι μονότονη. | ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ |
| (στ) Κάθε αύξουσα ακολουθία είναι κάτω φραγμένη. | ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ |
| (ζ) Κάθε κάτω φραγμένη ακολουθία είναι αύξουσα. | ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ |
| (η) Κάθε φραγμένη ακολουθία είναι κάτω φραγμένη. | ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ |
| (θ) Κάθε κάτω φραγμένη ακολουθία είναι φραγμένη. | ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ |

2. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τις πιο κάτω ακολουθίες.

- | | | |
|---|---|--------------------------------------|
| (α) $a_n = 3n - 5, n \in \mathbb{N}$ | (β) $a_n = 4^n, n \in \mathbb{N}$ | (γ) $a_n = (-3)^n, n \in \mathbb{N}$ |
| (δ) $a_n = \frac{2n+3}{2n+1}, n \in \mathbb{N}$ | (ε) $a_n = (n-1) \cdot 3^{n+1}, n \in \mathbb{N}$ | |

3. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της ακολουθίας που εκφράζεται με τον αναδρομικό τύπο: $a_{n+1} = a_n^2 + 2, a_1 = 3$ αιτιολογώντας την απάντησή σας.

4. Να εξετάσετε κατά πόσο οι πιο κάτω ακολουθίες είναι φραγμένες ή όχι. Να κάνετε αναφορά σε κάτω ή άνω φραγμένη ακολουθία σε περίπτωση που η ακολουθία δεν είναι φραγμένη:

- | | | |
|---|---------------------------------------|--|
| (α) $a_n = 4^n, n \in \mathbb{N}$ | (β) $a_n = n^2 + 3, n \in \mathbb{N}$ | (γ) $a_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$ |
| (δ) $a_n = 1 - \frac{2}{n}, n \in \mathbb{N}$ | (ε) $a_n = -n^3, n \in \mathbb{N}$ | (στ) $a_n = \frac{\sin(n)}{n^4}, n \in \mathbb{N}$ |

5. Να βρείτε το ελάχιστο άνω φράγμα και το μέγιστο κάτω φράγμα της ακολουθίας $a_n, n \in \mathbb{N}$ με τύπο $a_n = \frac{3}{n}$.

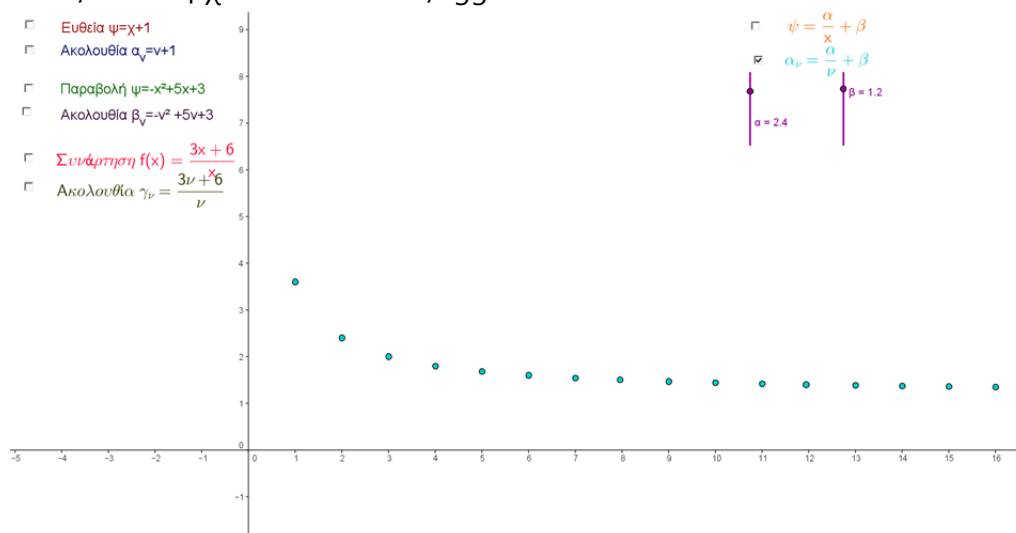
6.4 ΟΡΙΟ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ

Εξερεύνηση

Ένα φυτό ύψους 1 m τοποθετείται σε ένα δωμάτιο ύψους 2 m . Το φυτό σε κάθε επόμενη μέρα «ανεβαίνει» σε ύψος που αντιστοιχεί στο $\frac{1}{2}$ του ύψους που είχε την προηγούμενη μέρα. Να εξετάσετε αν το φυτό θα αγγίξει ποτέ στην οροφή του δωματίου, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

Διερεύνηση

Ανοίξτε το αρχείο «ακολουθίες1.ggb».



- (α) Να εξετάσετε τι συμβαίνει με τους όρους των ακολουθιών $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, n \in \mathbb{N}$ όταν το n μεγαλώνει απερίορστα.
- (β) Να αλλάξετε τις τιμές των δρομέων α και β , έτσι ώστε όταν το n μεγαλώνει απερίορστα οι όροι της ακολουθίας δ_n να προσεγγίζουν τον αριθμό 2.

6.4.1 Ορισμός-συγκλίνουσας ακολουθίας

Όταν οι όροι μιας ακολουθίας $(\alpha_n), n \in \mathbb{N}$ προσεγγίζουν **όσο θέλουμε κοντά** ένα αριθμό λ , καθώς το n αυξάνεται απερίορστα, τότε ο αριθμός λ λέγεται **όριο** της ακολουθίας και γράφουμε

$$\lim \alpha_n = \lambda \quad \text{ή} \quad \alpha_n \rightarrow \lambda$$

Λέμε ότι η ακολουθία συγκλίνει στον αριθμό λ και την ονομάζουμε **συγκλίνουσα ακολουθία**.

Αν σχηματίσουμε πίνακα τιμών παρατηρούμε ότι η ακολουθία $a_n, n \in \mathbb{N}$ με γενικό όρο $a_n = \frac{2n+1}{n}, n \in \mathbb{N}$, προσεγγίζει όσο κοντά θέλουμε τον αριθμό 2.

n	1	2	3	5	10	100	1000	10000
a_n	3	2,5	2,25	2,2	2,1	2,01	2,001	2,0001

Σχόλια

Όταν αναφέρουμε ότι « η ακολουθία $a_n = \frac{2n+1}{n}, n \in \mathbb{N}$ προσεγγίζει όσο θέλουμε κοντά τον αριθμό 2», δηλώνουμε την απόσταση (έστω ε) στην οποία θέλουμε να πλησιάσουμε τον αριθμό 2. Στη συνέχεια αναζητούμε όρους της ακολουθίας οι οποίοι να βρίσκονται σε ίση ή μικρότερη από το ε απόσταση από το 2.

Για παράδειγμα, ποιοι όροι της ακολουθίας υπάρχουν, ώστε να βρίσκονται σε απόσταση από το 2 μικρότερη από $\varepsilon_1 = \frac{1}{10}, \varepsilon_2 = \frac{1}{100}, \varepsilon_3 = \frac{1}{1000000}$ κτλ;

Επιλύοντας την ανίσωση έχουμε ισοδύναμα:

$$\text{Για } \varepsilon_1 = \frac{1}{10}: |a_n - 2| < \frac{1}{10} \Leftrightarrow \left| \frac{2n+1}{n} - 2 \right| < \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{10} \Leftrightarrow n > 10$$

Αυτό σημαίνει ότι όλοι οι όροι από τον a_{11} και μετά (δηλαδή οι άπειροι όροι $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots$) έχουν απόσταση από το 2 μικρότερη από $\frac{1}{10}$ μονάδες.

$$\checkmark \text{ Για } \varepsilon_2 = \frac{1}{100}: |a_n - 2| < \frac{1}{100} \Leftrightarrow \left| \frac{2n+1}{n} - 2 \right| < \frac{1}{100} \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{100} \Leftrightarrow n > 100$$

Έτσι, όλοι οι όροι από τον a_{100} και μετά (δηλαδή οι άπειροι όροι $a_{100}, a_{101}, a_{102}, \dots$) έχουν απόσταση από το 2 μικρότερη από $\frac{1}{100}$ μονάδες.

$$\checkmark \text{ Όμοια και όταν } \varepsilon_3 = \frac{1}{1000000} \text{ έχουμε } |a_n - 2| < \frac{1}{1000000} \Leftrightarrow n > 1000000 \text{ που και πάλι}$$

μας δείχνει πώς υπάρχουν άπειροι όροι τον από τον όρο $a_{1000000}$ και μετά να βρίσκονται κοντά και μάλιστα σε απόσταση μικρότερη από την πολύ μικρή απόσταση $\frac{1}{1000000}$.

Παρατηρήσεις

- Όσο το n αυξάνεται, η απόσταση $|a_n - 2|$, όλο και μικραίνει. Θα ήταν λάθος όμως να ισχυριστούμε ότι το όριο της ακολουθίας είναι το 2, γιατί η απόσταση $|a_n - 2|$ «συνεχώς μικραίνει». Αυτό γιατί με την ίδια λογική και η απόσταση $|a_n - 3|$ «συνεχώς μικραίνει», (ποτέ όμως δεν θα γίνει μικρότερη από 2 μονάδες) και έτσι το 3 δεν μπορεί να είναι το όριο της συγκεκριμένης ακολουθίας.
- Όσο το n αυξάνεται, η απόσταση $|a_n - 2|$ γίνεται όλο και μικρότερη από κάθε απόσταση της μορφής $|a_{n-1} - 2|$, δηλαδή ισχύει $|a_n - 2| < |a_{n-1} - 2|, \forall n \in \mathbb{N}$. Αυτό όμως δεν θα μπορέσει να αποτελέσει και πάλι ορισμό στη σύγκλιση ακολουθίας. Υπάρχουν δηλαδή ακολουθίες (όπως είναι οι σταθερές ακολουθίες), για τις οποίες δεν ισχύει η πιο πάνω ανισότητα.

Ορισμός:

Μια ακολουθία $a_n, n \in \mathbb{N}$ έχει **όριο** τον πραγματικό αριθμό λ ή **συγκλίνει στον αριθμό λ** , αν και μόνο αν, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε για όλα τα $n \geq n_0$ να έχουμε $|a_n - \lambda| < \varepsilon$ και γράφουμε $\lim a_n = \lambda$.

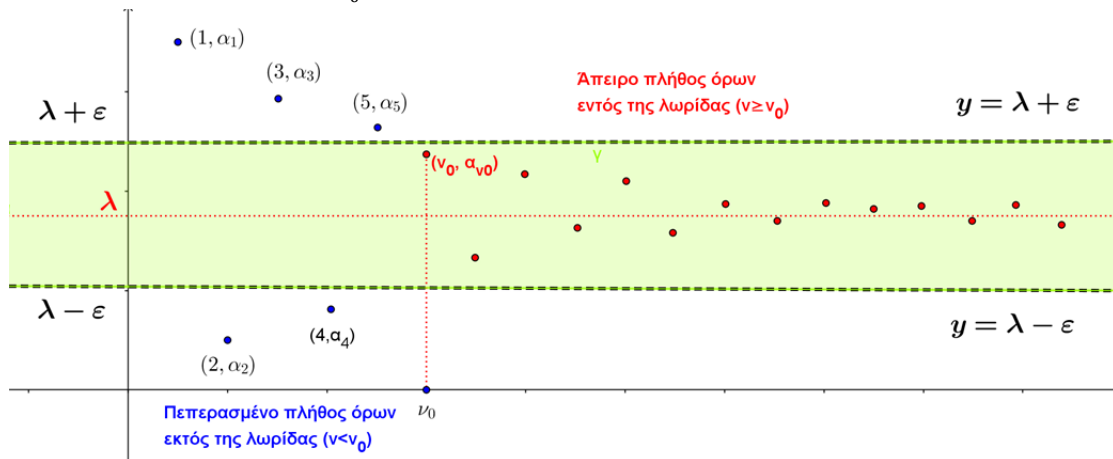
Συμβολικά:

$$\begin{aligned} &\text{Μια ακολουθία } a_n, n \in \mathbb{N} \text{ συγκλίνει στον αριθμό } \lambda \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}: |a_n - \lambda| < \varepsilon, \forall n \geq n_0 \end{aligned}$$

Σημείωση: Γράφουμε $\lim a_n = \lambda$, αντί $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Σχόλια

- Ο φυσικός αριθμός n_0 εξαρτάται από το ε και γράφεται και ως $n_0 = n_0(\varepsilon)$.
- Το όριο μιας συγκλίνουσας ακολουθίας είναι **μοναδικό**.
- Μια ακολουθία με όριο το 0, λέγεται **μηδενική ακολουθία**.
- Όταν μια ακολουθία συγκλίνει στον πραγματικό αριθμό $\lambda \neq 0$, τότε από κάποιο δείκτη και μετά ($n \geq n_0$) όλοι οι όροι της ακολουθίας ανήκουν σε περιοχή με κέντρο το λ και ακτίνα ε , ενώ πεπερασμένου πλήθους όροι μένουν εκτός της συγκεκριμένης περιοχής. Αυτό **γραφικά**, ερμηνεύεται από την παρατήρηση ότι, όλοι οι όροι της ακολουθίας με δείκτες n και $n \geq n_0$ (δηλαδή άπειροι όροι από ένα δείκτη n_0 και μετά) ανήκουν στην «οριζόντια λωρίδα» που ορίζουν οι ευθείες $y = \lambda - \varepsilon$ και $y = \lambda + \varepsilon$. Δηλαδή, εκτός της λωρίδας μένει μόνο το πεπερασμένο πλήθος όρων $a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}$. Το n_0 προφανώς αλλάζει σε κάθε επιλογή του ε



Παρατήρηση

Από το πιο πάνω σχήμα είναι εμφανές ότι **κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι και φραγμένη**. Όλοι οι όροι με δείκτη $n \geq n_0$ βρίσκονται μεταξύ των αριθμών $\lambda - \varepsilon$ και $\lambda + \varepsilon$. Οι πεπερασμένοι όροι που είναι εκτός της λωρίδας έχουν συγκεκριμένη τιμή. Άρα, τα άνω και κάτω φράγματα μιας συγκλίνουσας ακολουθίας είναι τα $\pm M$, όπου $M = \max\{a_1, a_2, \dots, a_{n_0}, \lambda \pm \varepsilon\}$.

Θεώρημα:

Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη.

Απόδειξη

Αν η ακολουθία a_n συγκλίνει στο λ και ε_1 είναι οποιοσδήποτε θετικός αριθμός, τότε έχουμε $|a_n - \lambda| < \varepsilon_1, \forall n \geq n_0$.

Έτσι, $|a_n| = |a_n - \lambda + \lambda| \leq |a_n - \lambda| + |\lambda| < \varepsilon_1 + |\lambda| = \varphi, \forall n \geq n_0$. Δηλαδή, για όλους του όρους με δείκτη από το n_0 και μετά ισχύει $|a_n| < \varphi$. Εξετάζοντας και τους υπόλοιπους όρους για $n < n_0$ τότε η ακολουθία a_n είναι φραγμένη κατά απόλυτη τιμή από τον αριθμό M , με $M = \max\{a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}, \varepsilon_1 + |\lambda|\}$.

Παράδειγμα 1:

Να δείξετε, με τη βοήθεια του ορισμού, ότι η ακολουθία $a_n = \frac{3}{n}, n \in \mathbb{N}$ είναι μηδενική.

Λύση:

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 > 0$, τέτοιο ώστε για όλα τα $n \geq n_0$, να έχουμε $\left|\frac{3}{n} - 0\right| < \varepsilon$.

$$\left|\frac{3}{n} - 0\right| < \varepsilon < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{3}{n}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{3}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{3}{\varepsilon}$$

Συνεπώς, αρκεί να επιλέξουμε ως n_0 έναν φυσικό αριθμό που είναι μεγαλύτερος από το $\frac{3}{\varepsilon}$.

Παράδειγμα 2:

Δίνεται η ακολουθία $a_n = \frac{n-1}{n+3}, n \in \mathbb{N}$. Να αποδείξετε ότι $\lim a_n = 1$.

Λύση:

$$|a_n - 1| = \left|\frac{n-1}{n+3} - 1\right| = \left|\frac{n-1-n-3}{n+3}\right| = \left|\frac{-4}{n+3}\right| = \frac{4}{n+3} < \frac{4}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{4}{\varepsilon}$$

Δηλαδή για οποιοδήποτε θετικό αριθμό ε υπάρχει δείκτης n_0 τον οποίο επιλέγουμε ως έναν φυσικό αριθμό που είναι μεγαλύτερος του $\frac{4}{\varepsilon}$. Έτσι, θα ισχύει $|a_n - 1| < \varepsilon$, για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως $\lim a_n = 1$.

6.4.2. Υπολογισμός ορίου ακολουθίας

Οι γνωστές ιδιότητες των ορίων συναρτήσεων με τύπο $y = f(x)$, όταν $x \rightarrow \infty$, καθώς και τα βασικά όρια που έχουμε μελετήσει ισχύουν και για τις ακολουθίες. Για παράδειγμα,

✓ Η ακολουθία $a_n = 2n^2 + 3n - 5, n \in \mathbb{N}$ έχει όριο το $+\infty$, γιατί
 $\lim a_n = \lim(2n^2 + 3n - 5) = \lim(2n^2) = 2 \cdot \lim n^2 = +\infty$

✓ Η ακολουθία $a_n = \frac{2-5n^2}{n+1}, n \in \mathbb{N}$ έχει όριο το $-\infty$, γιατί
 $\lim a_n = \lim\left(\frac{2-5n^2}{n+1}\right) = \lim\left(\frac{-5n^2}{n}\right) = \lim(-5n) = -5 \cdot \lim(n) = -5 \cdot \infty = -\infty$

✓ Η ακολουθία $a_n = \frac{3n^2+5}{6n^2+1}, n \in \mathbb{N}$ έχει όριο το $\frac{1}{2}$, γιατί
 $\lim a_n = \lim \frac{3n^2+5}{6n^2+1} = \lim \frac{3n^2}{6n^2} = \lim \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Παράδειγμα 3:

Δίνεται η ακολουθία $\alpha_n = \frac{n+1}{2n-3}, n \in \mathbb{N}$.

(α) Να υπολογίσετε το όριό της.

(β) Να δείξετε ότι είναι φραγμένη.

Λύση:

(α) Ισχύει ότι $\lim \alpha_n = \lim \left(\frac{n+1}{2n-3} \right) = \lim \left(\frac{n}{2n} \right) = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$

(β) Αποδείξαμε στο (α) ότι η ακολουθία είναι συγκλίνουσα με όριο το $\frac{1}{2}$. Άρα η ακολουθία είναι φραγμένη, γιατί κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη.

Παράδειγμα 4:

Να υπολογίσετε τα όρια των ακολουθιών με γενικό όρο:

$$(α) \quad \alpha_n = -3n^2 + 2n + 1 \quad (β) \quad \alpha_n = \frac{2n^3 - 5n^2 - n}{4n^3 + 3} \quad (γ) \quad \alpha_n = \frac{1}{n^2}$$

Λύση:

$$(α) \quad \lim \alpha_n = \lim (-3n^2 + 2n + 1) = \lim (-3n^2) = -\infty.$$

$$(β) \quad \lim \alpha_n = \lim \frac{2n^3 - 5n^2 - n}{4n^3 + 3} = \lim \frac{2n^3}{4n^3} = \frac{1}{2}$$

$$(γ) \quad \lim \alpha_n = \lim \frac{1}{n^2} = \left(\lim \left(\frac{1}{n} \right) \right)^2 = 0^2 = 0.$$

Θεώρημα:

Αν μια ακολουθία $\alpha_n, n \in \mathbb{N}$ είναι μηδενική και μια ακολουθία $\beta_n, n \in \mathbb{N}$ είναι φραγμένη, τότε η ακολουθία $\gamma_n = \alpha_n \cdot \beta_n, n \in \mathbb{N}$ είναι μηδενική ακολουθία.

Δηλαδή, αν $\alpha_n \rightarrow 0$ και β_n φραγμένη, τότε η ακολουθία $\alpha_n \cdot \beta_n \rightarrow 0$.

Παράδειγμα 5:

Να αποδείξετε ότι η ακολουθία $\alpha_n = \frac{\eta\mu n}{n^2+1}, n \in \mathbb{N}$ είναι μηδενική.

Λύση:

Η ακολουθία $\beta_n = \eta\mu n, n \in \mathbb{N}$ είναι φραγμένη, γιατί ισχύει $|\eta\mu n| \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Η ακολουθία $\gamma_n = \frac{1}{n^2+1}, n \in \mathbb{N}$ είναι μηδενική.

Επομένως, το γινόμενο $\alpha_n = \beta_n \cdot \gamma_n = \frac{\eta\mu n}{n^2+1}$ είναι μηδενική ακολουθία.

Ανάλογο θεώρημα με το κριτήριο παρεμβολής στο όριο συνάρτησης ισχύει και στις ακολουθίες.

Θεώρημα

Έστω οι ακολουθίες: $a_n, n \in \mathbb{N}$, $\beta_n, n \in \mathbb{N}$ και $\gamma_n, n \in \mathbb{N}$.

Αν ισχύει
$$\begin{cases} \beta_n \leq a_n \leq \gamma_n, \forall n \geq n_1 \\ \beta_n \rightarrow a \text{ και } \gamma_n \rightarrow a \end{cases}, \text{ τότε } a_n \rightarrow a.$$

Παράδειγμα 6:

Να υπολογίσετε τα όρια της ακολουθίας $a_n = \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n}, n \in \mathbb{N}$.

Λύση:

Ισχύει ότι $-1 \leq \sin \frac{n\pi}{2} \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{n} \leq \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n} \leq \frac{1}{n}$, γιατί $n > 0$.

Παρατηρούμε ότι $-\frac{1}{n} \rightarrow 0$ και $\frac{1}{n} \rightarrow 0$.

Συνεπώς, από το κριτήριο της παρεμβολής προκύπτει ότι $a_n \rightarrow 0$.

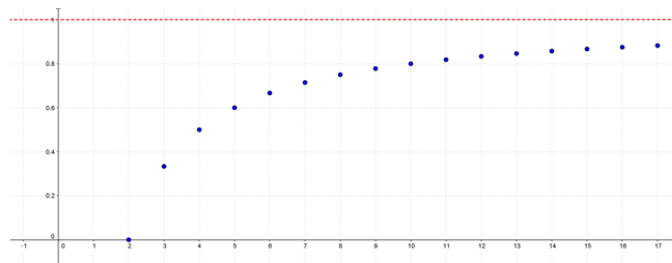
Θεώρημα:

Κάθε **μονότονη και φραγμένη** ακολουθία πραγματικών αριθμών **συγκλίνει** σε κάποιο πραγματικό αριθμό.

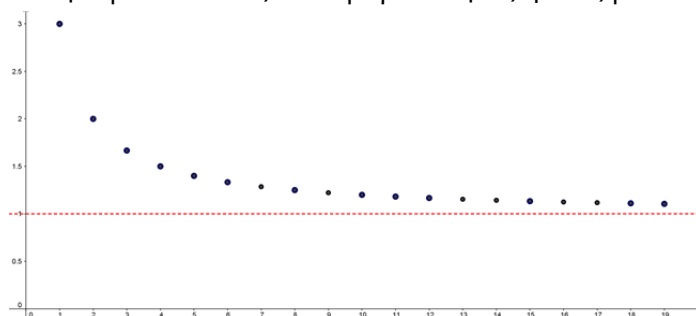
✓ Αν μια ακολουθία $a_n, n = 1, 2, \dots$ είναι αύξουσα και έχει ως ένα άνω φράγμα το s , τότε η ακολουθία συγκλίνει και μάλιστα ισχύει $\lim a_n \leq s$.

Για παράδειγμα, η ακολουθία $a_n = \frac{n-2}{n}, n = 1, 2, \dots$ είναι γνησίως αύξουσα και έχει ως ένα άνω φράγμα τον αριθμό 1, γιατί $a_n = \frac{n-2}{n} = 1 - \frac{2}{n} < 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Τότε συγκλίνει σε έναν αριθμό ο οποίος είναι μικρότερος ή ίσος με το 1.



✓ Αν μια ακολουθία $a_n, n = 1, 2, \dots$ είναι φθίνουσα και έχει ως ένα κάτω φράγμα το σ , τότε η ακολουθία συγκλίνει και μάλιστα ισχύει $\lim a_n \geq \sigma$. Για παράδειγμα, η ακολουθία $a_n = \frac{n+2}{n}, n = 1, 2, \dots$ είναι γνησίως φθίνουσα και έχει ως ένα κάτω φράγμα τον αριθμό 1, γιατί $a_n = \frac{n+2}{n} = 1 + \frac{2}{n} > 1, \forall n \in \mathbb{N}$. Τότε, η ακολουθία a_n συγκλίνει σε ένα αριθμό ο οποίος είναι μεγαλύτερος ή ίσος με το 1.



Δραστηριότητες

1. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ την καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
- (α) Μια ακολουθία συγκλίνει αν και μόνον αν το όριο της είναι πραγματικός αριθμός. ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
- (β) Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη. ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
- (γ) Κάθε σταθερή ακολουθία είναι συγκλίνουσα. ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
- (δ) Κάθε ακολουθία που είναι αύξουσα και φραγμένη συγκλίνει. ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
2. Να εξετάσετε κατά πόσο οι πιο κάτω ακολουθίες είναι συγκλίνουσες ή όχι.
- (α) $a_n = 4n - 2$ (β) $a_n = \frac{3n + 1}{2n + 1}$ $a_n = \frac{n^3 - 2n}{n^2 - 2n + 2}$
- (γ) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$ (δ) $a_n = \frac{\eta\mu n}{n^3}$ (ε) $a_{n+1} = a_n + 2, \quad a_1 = 1$
3. ! Δίνεται η ακολουθία $a_n, n = 1, 2, 3, \dots$ με $a_1 = 0$ και $a_{n+1} = \frac{2a_n + 4}{3}$.
- (α) Να δείξετε ότι η ακολουθία είναι γνησίως αύξουσα.
- (β) Να δείξετε ότι η ακολουθία είναι φραγμένη.
- (γ) Να συμπεράνετε ότι η ακολουθία είναι συγκλίνουσα.

6.5. ΕΙΔΙΚΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

6.5.1 Αριθμητική πρόοδος

Διερεύνηση

Σε ένα αμφιθέατρο η πρώτη σειρά έχει 20 καθίσματα και κάθε επόμενη σειρά έχει 4 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενή της.

(α) Να υπολογίσετε πόσα καθίσματα θα έχει η 5^η σειρά.

(β) Να βρείτε έναν αναδρομικό τύπο της ακολουθίας που εκφράζει το πλήθος των καθισμάτων σε κάθε σειρά.



Ορισμός

Αριθμητική πρόοδος λέγεται η ακολουθία $a_n, n \in \mathbb{N}$ της οποίας ο κάθε όρος εκτός από τον πρώτο, προκύπτει από τον προηγούμενό του αν σε αυτόν προσθέσουμε τον ίδιο σταθερό αριθμό, δηλαδή $a_{n+1} = a_n + \delta, n = 1, 2, 3, \dots$

Ο σταθερός αριθμός ονομάζεται **διαφορά** της αριθμητικής προόδου και συμβολίζεται με δ .

Μία αριθμητική πρόοδος ορίζεται πλήρως όταν είναι γνωστός ο πρώτος όρος της και η διαφορά της.

Για παράδειγμα, η αριθμητική πρόοδος με $a_1 = -1$ και $\delta = 5$, ορίζεται πλήρως και έχει τους πέντε πρώτους όρους της $-1, 4, 9, 14, 19, \dots$

Συνεπώς, η ακολουθία a_n είναι αριθμητική πρόοδος όταν ισχύει

$$a_{n+1} = a_n + \delta \quad \text{ή} \quad a_{n+1} - a_n = \delta, \forall n \in \mathbb{N}, \delta \in \mathbb{R}$$

Προκύπτει άμεσα από τον ορισμό ότι το είδος της μονοτονίας της αριθμητικής προόδου εξαρτάται από το δ .

Η αριθμητική πρόοδος είναι **γνησίως αύξουσα** αν $\delta > 0$, **γνησίως φθίνουσα** αν $\delta < 0$ και **σταθερή** αν $\delta = 0$.

Παράδειγμα 1:

Να δείξετε ότι η ακολουθία με γενικό όρο $a_n = 4n - 2$ είναι αριθμητική πρόοδος και να εξετάσετε το είδος της μονοτονίας της.

Λύση:

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η διαφορά $a_{n+1} - a_n$ είναι σταθερή (ανεξάρτητη του n). Έχουμε, $a_{n+1} - a_n = 4(n+1) - 2 - (4n - 2) = 4n + 4 - 2 + 2 - 4n = 4, \forall n \in \mathbb{N}$.

Συνεπώς, η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος με $a_1 = 2$ και $\delta = 4$.

Η ακολουθία είναι γνησίως αύξουσα, γιατί $\delta = 4 > 0$.

Πρόταση:

Αν α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, τότε $2\beta = \alpha + \gamma$.

Αντίστροφα, αν κάθε τριάδα α, β, γ διαδοχικών όρων της ακολουθίας $a_n, n \in \mathbb{N}$, ισχύει $2\beta = \alpha + \gamma$, τότε η ακολουθία $a_n, n \in \mathbb{N}$ είναι αριθμητική πρόοδος.

Ο αριθμός β λέγεται **αριθμητικός μέσος** των αριθμών α και γ και είναι ίσος με $\frac{\alpha+\gamma}{2}$.

Απόδειξη:

Αφού η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος, ισχύει ότι $a_{n+1} - a_n = \delta$.

Συνεπώς, $\beta - \alpha = \delta$ και $\gamma - \beta = \delta$.

$$\beta - \alpha = \gamma - \beta \Rightarrow 2\beta = \alpha + \gamma$$

Αντίστροφα, αν $2\beta = \alpha + \gamma$, τότε $\beta - \alpha = \gamma - \beta$ και επομένως οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου

Παράδειγμα 2:

Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $1, \sin^2\theta, \sin 2\theta, \theta \in \mathbb{R}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

Λύση:

Αρκεί να δείξουμε ότι $2\beta = \alpha + \gamma$, όταν $\alpha = 1, \beta = \sin^2\theta$ και $\gamma = \sin 2\theta$.

$$2\sin^2\theta = 1 + \sin 2\theta \Leftrightarrow \sin 2\theta = 2\sin^2\theta - 1$$

Η τελευταία σχέση ισχύει και επομένως είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

Πρόταση:

Ο γενικός όρος a_n μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο a_1 και διαφορά δ είναι

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot \delta, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Απόδειξη

Θα αποδείξουμε την πιο πάνω σχέση με την μέθοδο της Μαθηματικής (Τέλειας) Επαγωγής.

Έστω a_n μιας αριθμητική πρόοδος με πρώτο όρο a_1 και διαφορά δ .

Με επαγωγή έχουμε:

✓ Για $n = 1 : a_1 = a_1 + (1 - 1) \cdot \delta$, ισχύει η σχέση.

✓ Υποθέτουμε ότι η σχέση ισχύει για $n = k$ δηλαδή,

$$a_k = a_1 + (k - 1) \cdot \delta.$$

Προσθέτουμε και στα δύο μέλη τη διαφορά δ και έχουμε,

$$a_k + \delta = a_1 + (k - 1) \cdot \delta + \delta \Leftrightarrow a_{k+1} = a_1 + (k - 1 + 1) \cdot \delta \Leftrightarrow a_{k+1} = a_1 + k \cdot \delta.$$

Αφού ισχύει η σχέση για $n = k + 1$, σύμφωνα με την τέλεια επαγωγή η σχέση ισχύει $\forall n \in \mathbb{N}$.

Παράδειγμα 3:

Σε αριθμητική πρόοδο ο τρίτος όρος είναι 8 και το άθροισμα του πρώτου και έκτου όρου είναι 19. Να σχηματίσετε την αριθμητική πρόοδο.

Λύση:

Έστω $a_1, a_2, a_3, \dots$ οι όροι της αριθμητικής προόδου. Ισχύει:

$$\begin{cases} a_3 = 8 \\ a_1 + a_6 = 19 \end{cases}$$

$$\text{Ισοδύναμα έχουμε } \begin{cases} a_1 + 2\delta = 8 \\ a_1 + a_1 + 5\delta = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + 2\delta = 8 \\ 2a_1 + 5\delta = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1 + 4\delta = 16 \\ 2a_1 + 5\delta = 19 \end{cases}$$

Λύνοντας το γραμμικό σύστημα έχουμε $\delta = 3, a_1 = 2$.

Επομένως οι αρχικοί όροι της αριθμητικής προόδου είναι: 2, 5, 8, 11, 14, ...

Παράδειγμα 4:

Ένας υπάλληλος παίρνει σταθερή αύξηση 5 ευρώ κάθε μήνα. Αν το Μάρτιο του 2016 ο μισθός του είναι 500 ευρώ, να υπολογίσετε:

(α) το μισθό του το Δεκέμβριο του ίδιου χρόνου.

(β) ποιο μήνα θα πάρει μισθό 675 ευρώ.

Λύση:

(α) Ο μισθός κάθε μήνα αποτελεί αριθμητική πρόοδο με $a_1 = 500$ και $\delta = 5$. Ο μισθός το Δεκέμβριο είναι ο ένατος όρος: $a_n = a_1 + (n - 1)\delta \Rightarrow a_9 = a_1 + 8\delta = 540$.

(β) Γνωρίζουμε ότι $a_1 = 500$, $\delta = 5$ και $a_n = 675$.

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot \delta \Rightarrow 675 = 500 + (n - 1)5 \Rightarrow n = 35$$

Συνεπώς, σε 35 μήνες ή σε 2 χρόνια και 11 μήνες ο μισθός του θα γίνει 675 ευρώ.

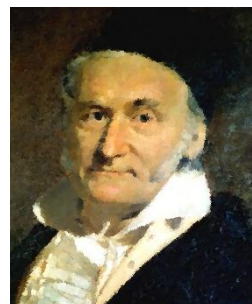
Άρα, το 2019 το Φεβρουάριο ο μισθός του θα γίνει 675 ευρώ.

Διερεύνηση

Ο Gauss, είναι ένας από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς, στην Ιστορία. Όταν ήταν μαθητής στο σχολείο ο δάσκαλος του ζήτησε να υπολογίσει το άθροισμα όλων των φυσικών αριθμών μέχρι το 100.

Ο Gauss απάντησε αμέσως με μια μέθοδο που αγνοούσε ο δάσκαλός του.

Να ερευνήσετε ποια μέθοδο χρησιμοποίησε ο Gauss και να την σχολιάσετε.



Πρόταση

Το άθροισμα των n πρώτων όρων αριθμητικής προόδου είναι

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \quad \text{ή} \quad S_n = \frac{n(2a_1 + (n - 1)\delta)}{2}$$

Απόδειξη:

Το άθροισμα των n πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου είναι

$$S_n = a_1 + (a_1 + \delta) + (a_1 + 2\delta) + \dots + (a_n - 2\delta) + (a_n - \delta) + a_n$$

$$S_n = a_n + (a_n - \delta) + (a_n - 2\delta) + \dots + (a_1 + 2\delta) + (a_1 + \delta) + a_1$$

Προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει ότι:

$$2\Sigma_n = (\alpha_1 + \alpha_n) + (\alpha_1 + \alpha_n) + \dots + (\alpha_1 + \alpha_n) = n(\alpha_1 + \alpha_n) \Rightarrow \Sigma_n = \frac{n(\alpha_1 + \alpha_n)}{2}.$$

$$\text{Χρησιμοποιώντας τη σχέση } \alpha_n = \alpha_1 + (n-1)\delta, \text{ έχουμε } \Sigma_n = \frac{n(2\alpha_1 + (n-1)\delta)}{2}.$$

Παράδειγμα 4:

Δίνεται μια αριθμητική πρόοδος με $\alpha_4 = 3$ και $\alpha_5 + \alpha_7 = 14$.

Να υπολογίσετε το άθροισμα των 100 πρώτων όρων της προόδου.

Λύση:

Θα βρούμε τις τιμές των α_1 και δ .

$$\alpha_4 = 3 \Rightarrow \alpha_1 + 3\delta = 3$$

$$\alpha_5 + \alpha_7 = 14 \Rightarrow \alpha_1 + 4\delta + \alpha_1 + 6\delta = 14 \Rightarrow \alpha_1 + 5\delta = 7$$

Επιλύουμε το πιο πάνω σύστημα και έχουμε $\alpha_1 = -3$ και $\delta = 2$.

Συνεπώς:

$$\Sigma_n = \frac{n(2\alpha_1 + (n-1)\delta)}{2} \Rightarrow \Sigma_{100} = \frac{100(2(-3) + 99 \cdot 2)}{2} = 9600$$

Το άθροισμα των 100 πρώτων όρων της προόδου είναι 9600.

Παράδειγμα 5:

Ένας εργολάβος συμφώνησε με τον ιδιοκτήτη ότι αν το σπίτι δεν είναι έτοιμο τη μέρα που συμφώνησαν θα του έδινε 100 ευρώ την επόμενη μέρα και για κάθε επιπλέον μέρα καθυστέρησης θα του έδινε 50 ευρώ περισσότερα από την προηγούμενη μέρα. Αν τελικά ο εργολάβος έδωσε 2700 ευρώ για καθυστέρηση, να βρείτε πόσες μέρες καθυστέρησης να κτίσει το σπίτι.

Λύση:

Τα χρήματα που δίνει κάθε μέρα αποτελούν αριθμητική πρόοδος με $\alpha_1 = 100$ και $\delta = 50$. Το άθροισμα των n πρώτων όρων της προόδου είναι $\Sigma_n = 2700$.

$$\Sigma_n = \frac{n(2\alpha_1 + (n-1)\delta)}{2} \Rightarrow 2700 = \frac{n(200 + (n-1)50)}{2} \Rightarrow 54 = \frac{n(4 + n - 1)}{2} \Rightarrow$$

$$n^2 + 3n - 108 = 0 \Rightarrow (n + 12)(n - 9) = 0 \Rightarrow n = 9$$

Καθυστέρησε 9 μέρες, να κτίσει το σπίτι.

Παράδειγμα 6:

Δίνεται ότι το άθροισμα των n πρώτων όρων μιας ακολουθίας $a_n, n \in \mathbb{N}$ είναι

$$\Sigma_n = 3n^2 + n, \quad n \in \mathbb{N}$$

Να αποδείξετε ότι η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος.

Λύση:

Ο νιοστός όρος της ακολουθίας προκύπτει αν αφαιρέσουμε από το άθροισμα Σ_n των n πρώτων όρων το άθροισμα Σ_{n-1} των $(n-1)$ πρώτων όρων.

Αν $\Sigma_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1} + \alpha_n$ και αν $\Sigma_{n-1} = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1}$, τότε ισχύει $\Sigma_n - \Sigma_{n-1} = (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1} + \alpha_n) - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1}) = \alpha_n$.

Έτσι, $\alpha_n = \Sigma_n - \Sigma_{n-1} = 3n^2 + n - (3(n-1)^2 + n - 1) = 6n - 2$.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η διαφορά $\alpha_{n+1} - \alpha_n$ είναι σταθερή, ανεξάρτητη του n .

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n = 6(n+1) - 2 - (6n - 2) = 6.$$

Συνεπώς, η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος με πρώτον όρο $\alpha_1 = 4$ και σταθερή διαφορά $\delta = 6$.

Δραστηριότητες

- Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ την καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
 - Μια ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος όταν ο ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ δεύτερος της όρος προκύπτει από τον προηγούμενο του αν σε αυτό προσθέσουμε τον ίδιο σταθερό αριθμό.
 - Αν ισχύει ότι $2\beta = \alpha + \gamma$, τότε οι αριθμοί α, β, γ είναι ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.
 - Αν α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, τότε ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ $\beta - \alpha = \gamma - \beta$.
 - Αν σε αριθμητική πρόοδο ισχύει ότι $\delta = 1$, τότε ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ $\alpha_n - \alpha_1 = n - 1$.
 - Αν η ακολουθία $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \dots$ είναι αριθμητική ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ πρόοδος, τότε και η ακολουθία που αποτελείται από τους όρους $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \dots$ είναι αριθμητική πρόοδος.
- Σε αριθμητική πρόοδο δίνονται $\alpha_1 = -2$ και $\delta = 3$. Να υπολογίσετε:
 - το δέκατο όρο.
 - το άθροισμα των 100 πρώτων όρων
- Να αποδείξετε ότι η ακολουθία με νιοστό όρο $\alpha_n = 3 - 5n$ είναι αριθμητική πρόοδος.
- Σε αριθμητική πρόοδο δίνονται $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 9$ και $\alpha_6 - \alpha_5 - \alpha_4 = 2$. Να σχηματίσετε τη πρόοδο.
- Να υπολογίσετε το άθροισμα $8 + 11 + 14 + \dots + 158$

6. Μια ομάδα στρατιωτών παρατάσσεται σε τριγωνικό σχήμα έτσι ώστε στην πρώτη σειρά να στέκεται ένας στρατιώτης και σε κάθε επόμενη σειρά να στέκονται δύο περισσότεροι στρατιώτες από τη προηγούμενη. Αν στην τελευταία σειρά στέκονται 99 στρατιώτες, να υπολογίσετε:

- (α) Πόσες σειρές σχηματίστηκαν;
(β) Πόσοι είναι όλοι οι στρατιώτες;

7. Δίνεται ότι το άθροισμα των n πρώτων όρων μιας ακολουθίας $a_n, n \in \mathbb{N}$ είναι

$$\Sigma_n = 5n^2 - n, \quad n \in \mathbb{N}$$

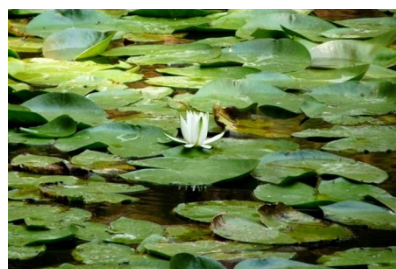
Να αποδείξετε ότι η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος

6.5.2 Γεωμετρική πρόοδος

Διερεύνηση

Ένα νούφαρο διπλασιάζεται κάθε μέρα.

- (α) Αν σε 100 μέρες καλύπτει όλη τη λίμνη σε πόσες μέρες κάλυψε τη μισή λίμνη.
(β) Να βρείτε ένα αναδρομικό τύπο της ακολουθίας που εκφράζει το μέγεθος του νούφαρου κάθε μέρα.



Ορισμός

Γεωμετρική πρόοδος λέγεται η ακολουθία της οποίας ο κάθε όρος προκύπτει από τον προηγούμενό του, αν τον πολλαπλασιάσουμε με τον ίδιο σταθερό μη μηδενικό αριθμό. Ο σταθερός αριθμός συμβολίζεται με λ ($\lambda \neq 0$) και ονομάζεται **λόγος της γεωμετρικής πρόοδου**.

Συνεπώς, η ακολουθία $a_n, n \in \mathbb{N}$ είναι γεωμετρική πρόοδος όταν ισχύει

$$a_{n+1} = \lambda \cdot a_n \text{ και } a_1 \neq 0 \quad \text{ή} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda \text{ και } a_1 \neq 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0).$$

Μια γεωμετρική πρόοδος και γενικότερα μια ακολουθία $a_n, n \in \mathbb{N}$:

➤ λέγεται **απόλυτα γνήσια αύξουσα** αν η ακολουθία $|a_n|, \forall n \in \mathbb{N}$ είναι αύξουσα.

Ισχύει δηλαδή $|a_{n+1}| > |a_n|, \forall n \in \mathbb{N}$.

➤ λέγεται **απόλυτα γνήσια φθίνουσα** αν η ακολουθία $|a_n|, \forall n \in \mathbb{N}$ είναι φθίνουσα.

Ισχύει δηλαδή $|a_{n+1}| < |a_n|, \forall n \in \mathbb{N}$.

Από τα πιο πάνω έχουμε συνοπτικά ότι:

- ✓ Αν $|\lambda| > 1$, τότε η γεωμετρική πρόοδος είναι απόλυτα αύξουσα και
- ✓ Αν $0 < |\lambda| < 1$ τότε η γεωμετρική πρόοδος είναι απόλυτα φθίνουσα.

Παράδειγμα 1:

Δίνεται ακολουθία με $a_n = 3 \cdot 2^n, n \in \mathbb{N}$. Να δείξετε ότι η ακολουθία $a_n, n \in \mathbb{N}$ είναι γεωμετρική πρόοδος.

Λύση:

Αρκεί να αποδείξουμε ότι ο λόγος $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ είναι σταθερός, ανεξάρτητος του n .

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3 \cdot 2^{n+1}}{3 \cdot 2^n} = \frac{2 \cdot 2^n}{2^n} = 2$$

Συνεπώς, η ακολουθία είναι γεωμετρική πρόοδος με $a_1 = 6$ και $\lambda = 2$.

Πρόταση:

Αν α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, τότε $\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$.

Αντίστροφα, αν α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι μιας ακολουθίας $a_n, n \in \mathbb{N}$ και ισχύει η σχέση $\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$, τότε η ακολουθία είναι γεωμετρική πρόοδος.

Ο αριθμός β λέγεται **γεωμετρικός μέσος** των αριθμών α και γ .

Απόδειξη:

Η ακολουθία είναι γεωμετρική πρόοδος. Επομένως, ισχύει ότι $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Συνεπώς, $\frac{\beta}{\alpha} = \lambda$ και $\frac{\gamma}{\beta} = \lambda$.

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta} \Rightarrow \beta^2 = \alpha \cdot \gamma$$

Αντίστροφα, αν $\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$, τότε $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta}$ και επομένως είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

Παράδειγμα 2:

Να αποδείξετε ότι αν οι αριθμοί $\kappa, \lambda, \mu, \nu$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, τότε ισχύει ότι $\lambda\mu = \kappa\nu$.

Λύση:

Ισχύει ότι $\lambda^2 = \kappa\mu$ και $\mu^2 = \lambda\nu$, γιατί οι αριθμοί $\kappa, \lambda, \mu, \nu$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου και επομένως $\lambda^2\mu^2 = \kappa\mu\lambda\nu \Leftrightarrow \lambda\mu = \kappa\nu$.

Πρόταση:

Ο γενικός όρος a_n μιας γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο a_1 και λόγο λ είναι

$$a_n = a_1 \cdot \lambda^{n-1}$$

Απόδειξη

Έστω a_n γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο a_1 και λόγο λ . Από την αναδρομική σχέση $a_{n+1} = \lambda \cdot a_n$ έχουμε:

$$a_2 = \lambda \cdot a_1,$$

$$a_3 = \lambda \cdot a_2$$

$$a_4 = \lambda \cdot a_3$$

$$\dots\dots\dots$$

$$a_n = \lambda \cdot a_{n-1}$$

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη και απλοποιούμε τους κοινούς παράγοντες που εμφανίζονται στα δύο μέλη. Έτσι, προκύπτει $a_n = a_1 \cdot \lambda^{n-1}$.

Σημείωση:

Η πιο πάνω απόδειξη μπορεί να γίνει (πιο αυστηρά) εφαρμόζοντας τη μέθοδο της τέλει επαγωγής.

Παράδειγμα 3:

Ο πληθυσμός μιας πόλης αυξάνεται σταθερά 10% κάθε χρόνο. Αν ο πληθυσμός της πόλης ήταν 10000 στο τέλος του 2016, να υπολογίσετε το πληθυσμό της πόλης στο τέλος του 2021.

Λύση:

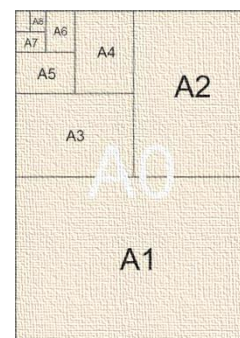
Ο πληθυσμός κάθε χρόνο είναι γεωμετρική πρόοδος με $a_1 = 10000$ και $\lambda = \frac{110}{100} = 1,1$.

Ο πληθυσμός το 2021 είναι ο πέμπτος όρος: $a_n = a_1 \lambda^{n-1} \Rightarrow a_5 = 10000 \cdot 1,1^4 = 14641$.

Το άθροισμα Σ_n των n πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου

Διερεύνηση

Ένα κομμάτι χαρτί πάχους 1mm μοιράζεται σε δύο κομμάτια. Μετά τα δύο κομμάτια μοιράζονται στα δυο και στη συνέχεια τα τέσσερα κομμάτια που προκύπτουν μοιράζονται στα δύο. Αυτή η διαδικασία συνεχίζεται για 20 φορές. Αν όλα τα κομμάτια χαρτί τοποθετηθούν το ένα πάνω στο άλλο, να βρείτε το ύψος της στήλης χαρτιού που θα κατασκευαστεί.



Πρόταση:

Το άθροισμα Σ_n των n πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο τον a_1 και λόγο λ είναι:

$$\Sigma_n = \frac{a_1(1 - \lambda^n)}{1 - \lambda}, \quad \lambda \neq 1$$

Αν $\lambda = 1$, τότε $\Sigma_n = n a_1$ (σταθερή ακολουθία με $a_n = a_1$).

Απόδειξη:

Το άθροισμα των n πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου ($\lambda \neq 1$) είναι

$$\Sigma_n = a_1 + a_1 \lambda + a_1 \lambda^2 + \dots + a_1 \lambda^{n-2} + a_1 \lambda^{n-1}$$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της πιο πάνω ισότητας με $-\lambda$ και προσθέτουμε κατά μέλη.

$$\Sigma_n = a_1 + a_1 \lambda + a_1 \lambda^2 + \dots + a_1 \lambda^{n-2} + a_1 \lambda^{n-1}$$

$$-\lambda \Sigma_n = -a_1 \lambda - a_1 \lambda^2 - \dots - a_1 \lambda^{n-2} - a_1 \lambda^{n-1} - a_1 \lambda^n \quad (+)$$

$$\Sigma_n - \lambda \Sigma_n = a_1 - a_1 \lambda^n \Rightarrow (1 - \lambda) \Sigma_n = a_1(1 - \lambda^n) \Rightarrow \Sigma_n = \frac{a_1(1 - \lambda^n)}{1 - \lambda}$$

Παράδειγμα 4:

Δίνεται γεωμετρική πρόοδος με τις ισότητες $\alpha_5 - \alpha_1 = 15$ και $\alpha_2 - \alpha_4 = 6$.
Να υπολογίσετε το άθροισμα των 5 πρώτων όρων της προόδου.

Λύση:

Θα βρούμε τις τιμές των α_1 και λ .

$$\alpha_5 - \alpha_1 = 15 \Rightarrow \alpha_1 \lambda^4 - \alpha_1 = 15 \Rightarrow \alpha_1 (\lambda^4 - 1) = 15, \quad \alpha_1 \neq 0 \text{ και } \lambda \neq \pm 1 \quad (1)$$

$$\alpha_2 - \alpha_4 = 6 \Rightarrow \alpha_1 \lambda - \alpha_1 \lambda^3 = 6 \Rightarrow \alpha_1 \lambda (1 - \lambda^2) = 6, \quad \alpha_1 \neq 0 \text{ και } \lambda \neq \pm 1, \lambda \neq 0 \quad (2)$$

Συνεπώς, από τις (1) και (2),

$$\frac{\alpha_1 (\lambda^4 - 1)}{\alpha_1 \lambda (1 - \lambda^2)} = \frac{15}{6} \Rightarrow \frac{(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1)}{\lambda(1 - \lambda^2)} = \frac{5}{2} = 0 \Rightarrow 2\lambda^2 + 2 = -5\lambda \Rightarrow 2\lambda^2 + 5\lambda + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$(2\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2} \text{ ή } \lambda = -2$$

$$\text{Αν } \lambda = -\frac{1}{2}, \text{ τότε } \alpha_1 = \frac{15}{\frac{1}{16} - 1} = -16 \text{ και επομένως}$$

$$\Sigma_n = \frac{\alpha_1(1 - \lambda^n)}{1 - \lambda} \Rightarrow \Sigma_5 = \frac{-16 \left(1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^5 \right)}{1 - \left(-\frac{1}{2} \right)} = -11$$

$$\text{Αν } \lambda = -2, \text{ τότε } \alpha_1 = \frac{15}{16 - 1} = 1 \text{ και επομένως}$$

$$\Sigma_n = \frac{\alpha_1(1 - \lambda^n)}{1 - \lambda} \Rightarrow \Sigma_5 = \frac{1(1 - (-2)^5)}{1 - (-2)} = 11$$

Παράδειγμα 5:

Δίνεται ότι το άθροισμα των n –πρώτων όρων μιας ακολουθίας $a_n, n \in \mathbb{N}$ είναι

$$\Sigma_n = 3^n - 1, \quad n \in \mathbb{N}$$

Να αποδείξετε ότι η ακολουθία είναι γεωμετρική πρόοδος.

Λύση:

Ο νιοστός όρος a_n της ακολουθίας προκύπτει αν αφαιρέσουμε από το άθροισμα των n πρώτων όρων το άθροισμα των $(n - 1)$ πρώτων όρων. Δηλαδή,

$$a_n = \Sigma_n - \Sigma_{n-1} = 3^{n+1} - 1 - (3^n - 1) = 3^{n+1} - 3^n.$$

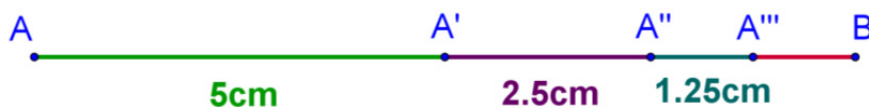
Αρκεί να αποδείξουμε ότι ο λόγος $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ είναι σταθερός, ανεξάρτητος του n .

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+2} - 3^{n+1}}{3^{n+1} - 3^n} = \frac{3^n(9 - 3)}{3^n(3 - 1)} = 3$$

Άρα, η ακολουθία είναι γεωμετρική πρόοδος με $\alpha_1 = 2$ και $\lambda = 3$.

Το σημείο A απέχει από το σημείο B απόσταση 10 cm. Το σημείο A ξεκινά να κινείται προς το σημείο B με τον εξής τρόπο: Το πρώτο λεπτό καλύπτει 5 cm, το δεύτερο 2,5 cm, το τρίτο 1,25 cm κ.τ.λ.

Πόσα λεπτά θα χρειαστεί το σημείο A για να φτάσει στο σημείο B;



Σημείωση: Το πιο πάνω πρόβλημα αποτελεί παραλλαγή του «Παράδοξου» του Ζήνωνα γνωστού από την αρχαιότητα.

Σε μια γεωμετρική πρόοδο και γενικά σε μια ακολουθία $n \in \mathbb{N}$ το άθροισμα των n πρώτων όρων της το συμβολίσαμε με Σ_n .

Αν το $\lim(\Sigma_n)$ είναι πραγματικός αριθμός, τότε η ακολουθία a_n λέγεται ότι έχει άθροισμα απείρων όρων και το όριο $\lim(\Sigma_n)$ συμβολίζεται με Σ_∞ .

Πρόταση:

Το άθροισμα των απείρων όρων (Σ_∞) μιας απόλυτα γνήσια φθίνουσας γεωμετρικής προόδου με πρώτον όρο το a_1 και λόγο λ είναι:

$$\Sigma_\infty = \frac{a_1}{1-\lambda}, \quad |\lambda| < 1$$

Απόδειξη

Σε μια απόλυτα γνήσια φθίνουσα γεωμετρική πρόοδο με πρώτον όρο το a_1 και λόγο λ ισχύει $\Sigma_n = \frac{a_1(1-\lambda^n)}{1-\lambda}$ και $|\lambda| < 1$. Από τις ιδιότητες ορίων ακολουθίας έχουμε $\lim \lambda^n = 0$.

Επομένως θα ισχύει $\Sigma_\infty = \lim \Sigma_n = \lim \frac{a_1(1-\lambda^n)}{1-\lambda} = \lim \left(\frac{a_1}{1-\lambda} - \frac{a_1 \cdot \lambda^n}{1-\lambda} \right) = \frac{a_1}{1-\lambda} - 0 = \frac{a_1}{1-\lambda}$

Παράδειγμα 6:

Να υπολογίσετε το άθροισμα S απείρων όρων γεωμετρικής προόδου με πρώτον όρο $a_1 = 2$ και λόγο $\lambda = -\frac{1}{2}$.

Λύση:

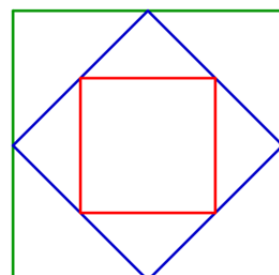
$$S = 2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \dots$$

Η γεωμετρική πρόοδος είναι απόλυτα γνήσια φθίνουσα, γιατί $|\lambda| < 1$ και επομένως

$$S = \Sigma_\infty = \frac{a_1}{1-\lambda} \Rightarrow \Sigma_\infty = \frac{2}{1-(-\frac{1}{2})} = \frac{2}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}.$$

Παράδειγμα 7:

Δίνεται τετράγωνο με πλευρά 2cm. Με κορυφές τα μέσα των πλευρών του κατασκευάζουμε άλλο τετράγωνο και συνεχίζουμε κατασκευάζοντας τετράγωνα με τον ίδιο τρόπο. Να βρείτε το άθροισμα των περιμέτρων των απείρων τετραγώνων που δημιουργούνται με αυτόν τον τρόπο.



Λύση:

Παρατηρούμε ότι η πλευρά κάθε τετραγώνου είναι η μισή της διαγωνίου του προηγούμενου τετραγώνου.

$$\alpha_1 = 2, \alpha_2 = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}, \alpha_3 = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{2} = 1, \dots$$

Οι περιμέτροι των τετραγώνων είναι $\Pi_1 = 8, \Pi_2 = 4\sqrt{2}, \Pi_3 = 4\sqrt{2}, \dots$ και σχηματίζουν απολύτως φθίνουσα γεωμετρική πρόοδο με $\Pi_1 = 8$ και $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Συνεπώς,

$$\Sigma_{\infty} = \frac{\Pi_1}{1 - \lambda} \Rightarrow \Sigma_{\infty} = \frac{8}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{16}{2 - \sqrt{2}} = 4 + 2\sqrt{2}$$

Δραστηριότητες

- Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ την καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
 - Η ακολουθία με γενικό όρο $a_{n+1} = 5a_n$ είναι γεωμετρική ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ πρόοδος.
 - Αν για οποιουσδήποτε 3 διαδοχικούς όρους μια ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ ακολουθίας ισχύει ότι $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta}$ τότε οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.
 - Κάθε σταθερή ακολουθία $a_n = c, c \neq 0$ είναι γεωμετρική ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ πρόοδος.
 - Αν σε γεωμετρική πρόοδο ισχύει ότι $\lambda = 0$, τότε $\Sigma_n = a_1$. ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
 - Αν η ακολουθία $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots$ είναι γεωμετρική ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ πρόοδος, τότε και η ακολουθία που αποτελείται από τους όρους $a_2, a_4, a_6, \dots$ είναι γεωμετρική πρόοδος.
- Σε γεωμετρική πρόοδο δίνονται $a_1 = -1$ και $\lambda = 3$. Να βρείτε:
 - το δέκατο όρο
 - το άθροισμα των 100 πρώτων όρων
- Να αποδείξετε ότι η ακολουθία με νιοστό όρο $a_n = -5 \cdot 4^n$ είναι γεωμετρική πρόοδος.
- Σε γεωμετρική πρόοδο δίνονται $a_1 + a_2 = 3$ και $a_3 + a_4 = 6$. Να υπολογίσετε το άθροισμα των 7 πρώτων όρων της προόδου.
- Να υπολογίσετε το άθροισμα $\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{2}{9} + \frac{1}{10} + \frac{4}{27} - \frac{1}{50} - \dots$

6. Τοποθετούμε κόκκους ρυζιού στα 64 τετράγωνα της σκακιέρας με τον τρόπο που φαίνεται στο διπλανό σχήμα, δηλαδή ένας κόκκος στο κάτω αριστερά τετραγωνάκι, δύο στο τετράγωνο που βρίσκεται στα δεξιά του, τέσσερις στο επόμενο κτλ. Να υπολογίσετε πόσους κόκκους ρυζιού πρέπει να βάλουμε στο 64^ο τετράγωνο της σκακιέρας.



7. Δίνεται ότι το άθροισμα Σ_n των n – πρώτων όρων μιας ακολουθίας $a_n, n \in \mathbb{N}$ είναι:

$$\Sigma_n = 2 - \frac{2}{5^n}$$

Να αποδείξετε ότι η ακολουθία είναι γεωμετρική πρόοδος και να υπολογίσετε το άθροισμα των άπειρων όρων της ακολουθίας.

Δραστηριότητες Ενότητας

1. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ την καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- (α) Κάθε ακολουθία έχει πεδίο ορισμού τους φυσικούς αριθμούς. ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
- (β) Μια ακολουθία λέγεται φθίνουσα, όταν κάθε επόμενος όρος της είναι μεγαλύτερος από ή ίσος με τον προηγούμενό του. ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
- (γ) Όλοι οι όροι κάθε σταθερής ακολουθίας είναι ίσοι. ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
- (δ) Κάθε αύξουσα ακολουθία είναι μονότονη. ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
- (ε) Κάθε μονότονη ακολουθία είναι αύξουσα. ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
- (στ) Κάθε σταθερή ακολουθία είναι μονότονη. ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
- (ζ) Μία ακολουθία $a_n, n \in \mathbb{N}$, είναι άνω φραγμένη, όταν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $a_n \geq \lambda, \forall n \in \mathbb{N}$. ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
- (η) Κάθε φραγμένη ακολουθία είναι άνω φραγμένη και κάτω φραγμένη. ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
- (θ) Κάθε ακολουθία που είναι γνησίως φθίνουσα και φραγμένη συγκλίνει. ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
- (ι) Μια ακολουθία $a_n, n \in \mathbb{N}$, συγκλίνει, όταν $\lim a_n = \lambda$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
- (ια) Μια ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος, όταν $a_{n+1} - a_n = \delta, \forall n \in \mathbb{N}$. ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
- (ιβ) Κάθε σταθερή ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος. ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
- (ιγ) Μια αριθμητική πρόοδος είναι γνησίως αύξουσα όταν $\delta > 0$. ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
- (ιδ) Δεν υπάρχει ακολουθία η οποία να είναι αριθμητική και γεωμετρική πρόοδος ταυτόχρονα. ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ
- (ιε) Το άπειρο άθροισμα των όρων γεωμετρικής προόδου είναι πάντα πραγματικός αριθμός. ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ

2. Έστω μια ακολουθία που ορίζεται από τον αναγωγικό τύπο:
 $\alpha_{n+1} = \alpha_n^2 - \alpha_n$, $\alpha_1 = 3$
 Να βρείτε τους 5 πρώτους όρους της.
3. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία $\alpha_n = \frac{3}{n+2}$, $n \in \mathbb{N}$ είναι γνησίως φθίνουσα.
4. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας των πιο κάτω ακολουθιών α_n , $n \in \mathbb{N}$ με γενικό όρο:
 (α) $\alpha_n = n^2 + 2n$ (β) $\alpha_n = -4^n + 3$ (γ) $\alpha_n = (-n+1)(-1)^n$
5. Να εξετάσετε αν οι πιο κάτω ακολουθίες είναι φραγμένες ή όχι. Να κάνετε αναφορά σε κάτω ή άνω φραγμένη ακολουθία σε περίπτωση που η ακολουθία δεν είναι φραγμένη:
 (α) $\alpha_n = (n-1)^2$, $n \in \mathbb{N}$ (β) $\alpha_n = 2 - \frac{3}{n+4}$, $n \in \mathbb{N}$ (γ) $\alpha_n = \frac{1}{2^n - 1}$, $n \in \mathbb{N}$
4. Να εξετάσετε κατά πόσο οι πιο κάτω ακολουθίες είναι συγκλίνουσες ή όχι.
 (α) $\alpha_n = \frac{3n^2}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ (β) $\alpha_n = \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$ (γ) $\alpha_n = \frac{\eta\mu n}{n}$, $n \in \mathbb{N}$
5. Να βρείτε τον χλιοστό όρο της αριθμητικής προόδου $-3, 5, 13, \dots$
6. Να βρείτε το x , ώστε οι αριθμοί $x-2$, x , $2x+1$ να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.
7. Μεταξύ των αριθμών 4 και 39 να παρεμβάλετε 6 αριθμούς, ώστε να σχηματίζουν όλοι μαζί αριθμητική πρόοδο.
8. Να σχηματίσετε αριθμητική πρόοδο της οποίας ο $3^{\text{ος}}$ και ο $7^{\text{ος}}$ όρος της έχουν άθροισμα 32, ενώ ο $4^{\text{ος}}$ και ο $5^{\text{ος}}$ έχουν άθροισμα 29.
9. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος 6, 10, 14, Να βρείτε πόσοι όροι της προόδου έχουν άθροισμα 160.
10. Σε ένα θέατρο ο αριθμός των καθισμάτων σε κάθε σειρά αποτελεί αριθμητική πρόοδο. Η πρώτη σειρά έχει 16 καθίσματα και η τελευταία 200 καθίσματα. Αν η δέκατη σειρά έχει 32 καθίσματα περισσότερα από τη δεύτερη σειρά, να βρείτε πόσες σειρές και πόσα καθίσματα έχει το θέατρο.
11. Να λύσετε την εξίσωση $(x+3) + (x+7) + (x+11) + \dots + (x+79) = 800$.

12. Δίνεται γεωμετρική πρόοδος με τρίτο όρο $\alpha_3 = 5$ και όγδοο όρο $\alpha_8 = \frac{5}{32}$. Να υπολογίσετε:
- (α) τον ενδέκατο όρο
- (β) το άθροισμα των άπειρων όρων
13. Αν οι μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να αποδείξετε ότι $\frac{\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3}{\alpha^2 \beta^2 \gamma^2} = \frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\beta^3} + \frac{1}{\gamma^3}$.
14. Να δείξετε ότι οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί αριθμοί γεωμετρικής προόδου αν και μόνον αν οι αριθμοί $\frac{1}{\alpha + \beta}, \frac{1}{\alpha - \gamma}, \frac{1}{\alpha - \beta}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.
15. Να υπολογίσετε το άθροισμα $2 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{18} + \dots$
16. Σε φθίνουσα γεωμετρική πρόοδο ο πρώτος όρος, το άθροισμα των δύο πρώτων όρων και το άθροισμα των απείρων όρων της είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Να βρείτε το λόγο της γεωμετρικής προόδου
17. Ένας καπνιστής καπνίζει ένα πακέτο τσιγάρα την ημέρα αξίας 5 ευρώ. Αν τα χρήματα που ξοδεύει κάθε χρόνο (365 μέρες) τα κατάθετε στην τράπεζα (στην αρχή κάθε χρόνου) με επιτόκιο 10%, να υπολογίσετε το ποσό που θα πάρει στο τέλος του δέκατου χρόνου.
18. Μια ελαστική μπάλα πέφτει από ύψος 2 m και κάθε φορά που κτυπά στο έδαφος χάνει 20% της αρχικής της ενέργειας. Αν δεν υπάρχουν άλλες απώλειες να υπολογίσετε
- (α) το ύψος της μπάλας μετά την 6^η αναπήδηση
- (β) το συνολικό διάστημα που θα διανύσει η μπάλα μέχρι να ακινητοποιηθεί.
19. Δίνεται πρόοδος με $\alpha_1 = x^2, \alpha_2 = x^2 - 1, \alpha_3 = x^2 - 2$ και $\alpha_{10} = 40$. Να βρείτε:
- (α) το είδος της προόδου
- (β) τις τιμές του x
- (γ) το άθροισμα όλων των θετικών όρων της
20. Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{4} + \frac{x}{8} + \frac{x^3}{8} + \frac{x}{16} + \frac{x^4}{16} + \dots = \frac{3}{2}, \quad |x| < 2$
21. Αν οι αριθμοί x, ψ, ω είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να αποδείξετε ότι και οι αριθμοί $x^2 - \omega\psi, \psi^2 - \omega x, \omega^2 - x\psi$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Δίνεται η ακολουθία $\alpha_n = \frac{x^n - y^n}{x^n + y^n}$, $x, y > 0$.
Να αποδείξετε ότι η ακολουθία είναι γνησίως αύξουσα όταν $x > y$ και γνησίως φθίνουσα όταν $x < y$.
2. Αριθμητική πρόοδος και φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος έχουν τον ίδιο πρώτο όρο και η διαφορά της αριθμητικής προόδου είναι τριπλάσια του λόγου της γεωμετρικής προόδου. Το άθροισμα των τριών πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου είναι ίσο με τον όγδοο όρο της, ενώ ο πέμπτος όρος της είναι διπλάσιος του αθροίσματος των άπειρων όρων της γεωμετρικής προόδου. Να σχηματίσετε τις δύο προόδους.
3. Δίνεται η ακολουθία με αναδρομικό τύπο $\alpha_{n+1} = 2\alpha_n + 1$, $n \in \mathbb{N}$. Αν ο τρίτος όρος της είναι ο 23, να υπολογίσετε τον πρώτο όρο της.
4. (α) Να αποδείξετε ότι αν μια ακολουθία είναι φθίνουσα, τότε είναι άνω φραγμένη.
(β) Να βρείτε μια ακολουθία η οποία να είναι άνω φραγμένη και να μην είναι φθίνουσα.
5. Δίνεται η ακολουθία $\alpha_n = \begin{cases} n, & n \text{ άρτιος} \\ n+1, & n \text{ περιττός} \end{cases}$. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία είναι αύξουσα.
6. Να αποδείξετε ότι το γινόμενο των n πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου είναι:
$$G_n = \alpha_1^n \cdot \lambda^{n^2 - n}$$
7. Δίνεται η ακολουθία $\alpha_n, n \in \mathbb{N}$ με όρους
$$\alpha_1 = \sqrt{2}, \alpha_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \alpha_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \dots$$

(α) Να βρείτε ένα αναδρομικό τύπο για την πιο πάνω ακολουθία.
(β) Να αποδείξετε ότι $\alpha_n = 2^{1 - \frac{1}{2^n}}$.
8. Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος $\alpha_n, n \in \mathbb{N}$ με $\alpha_1 \neq 0$ και $\lambda \neq 0$.
(α) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία $\beta_n = \frac{1}{\alpha_n}$ είναι γεωμετρική πρόοδος.
(β) Να αποδείξετε ότι $\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n}{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \dots + \beta_n} = \alpha_1 \alpha_n$.
9. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία $\alpha_n, n \in \mathbb{N}$ με αναγωγικό τύπο $\alpha_{n+1} = \sqrt{\alpha_n + 6}$, $\alpha_1 = 1$ συγκλίνει και να υπολογίσετε το όριο της. Να διερευνήσετε την περίπτωση στην οποία ισχύει ο ίδιος αναγωγικός τύπος, αλλά με $\alpha_1 = 3$.

