

Μαθηματικά
Γ' Ενιαίου Λυκείου
(μάθημα κατεύθυνσης)

[illegible]

A/A	ΔΙΔΑΚΤΕΑ ΥΛΗ	ΣΤΟΧΟΙ	ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ	ΠΕΡ.
2.	ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ 2.1 Επανάληψη	Με τη συμπλήρωση της ύλης οι μαθητές θα πρέπει να μπορούν να - Εφαρμόζουν τους τύπους παραγωγίσης: $c' = 0, \quad x' = 1, \quad (x^v)' = v \cdot x^{v-1}, \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad (e^x)' = e^x$ $(f \pm g)' = f' \pm g', \quad (af)' = a \cdot f', \quad a \in \mathbb{R}, \quad a - \text{σταθερά}$ $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g', \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$ $(\eta \mu x)' = \sigma \upsilon \nu x, \quad (\sigma \upsilon \nu x)' = -\eta \mu x$ $(\epsilon \phi x)' = \tau \epsilon \mu^2 x, \quad (\sigma \phi x)' = -\sigma \tau \epsilon \mu^2 x$ $(\tau \epsilon \mu x)' = \tau \epsilon \mu x \cdot \epsilon \phi x, \quad (\sigma \tau \epsilon \mu x)' = -\sigma \tau \epsilon \mu x \cdot \sigma \phi x$ - Βρίσκουν την παράγωγο σύνθετης συνάρτησης - Βρίσκουν την παράγωγο πεπλεγμένης συνάρτησης - Βρίσκουν παραγώγους ανώτερης τάξης (αν υπάρχουν) - Βρίσκουν την παράγωγο της αντίστροφης μιας συνάρτησης (αν υπάρχει) - Εφαρμόζουν τους τύπους παραγωγίσης: $(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad (a^x)' = a^x \cdot \ln a$	Να δοθούν παραδείγματα που περιέχουν συνδυασμό των περιπτώσεων που αναφέρονται στους στόχους.	3

A/A	ΔΙΔΑΚΤΕΑ ΥΛΗ	ΣΤΟΧΟΙ	ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ	ΠΕΡ.
	2.2 Παράγωγοι συναρτήσεων που ορίζονται παραμετρικά 2.3 Εφαρμογές παραγώγων	<i>Με τη συμπλήρωση της ύλης οι μαθητές θα πρέπει να μπορούν να:</i> - Βρίσκουν την πρώτη και τη δεύτερη παράγωγο συναρτήσεων που δίνονται παραμετρικά - Εφαρμόζουν τους κανόνες de L' Hospital για να υπολογίζουν όρια που παρουσιάζουν απροσδιοριστία της μορφής $\frac{0}{0}$ και $\frac{\infty}{\infty}$ - Βρίσκουν την εξίσωση και την κλίση της εφαπτομένης μιας καμπύλης σε σημείο της - Ορίζουν την κάθετη μιας καμπύλης σε σημείο της - Βρίσκουν την εξίσωση και την κλίση της κάθετης μιας καμπύλης σε σημείο της	Ανάμεσα σε άλλα παραδείγματα, να δοθούν και ασκήσεις που απαιτούν την εύρεση της εξίσωσης της εφαπτομένης και της κάθετης του κύκλου, της έλλειψης, της παραβολής και της υπερβολής σε σημείο τους	4 10
	2.4 Διαφορικό συνάρτησης	Ορίζει και βρίσκει το διαφορικό μιας συνάρτησης		1

Α/Α	ΔΙΔΑΚΤΕΑ ΥΛΗ	ΣΤΟΧΟΙ	ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ	ΠΕΡ.
	ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ 3.1 Εισαγωγή	<i>Με τη συμπλήρωση της ύλης οι μαθητές θα πρέπει να μπορούν να</i> - Αναγνωρίζουν στη γραφική παράσταση: α) τα διαστήματα και τα είδη της μονοτονίας της β) τα σημεία τοπικών ακρότατων της -μέγιστο, ελάχιστο-(αν υπάρχουν) γ) τα σημεία ολικών ακρότατων της (αν υπάρχουν) δ) τα διαστήματα στα οποία στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή προς τα κάτω ε) τα σημεία καμψής (αν υπάρχουν) - στ) τις ασύμπτωτες της (αν υπάρχουν)	Να δοθούν παραδείγματα γραφικών παραστάσεων στις οποίες να περιέχονται οι διάφορες έννοιες. Να συμπεριληφθούν και περιπτώσεις όπου η συνάρτηση είναι ορισμένη σε κλειστό διάστημα. Με παραδείγματα να φανεί η χρησιμότητα της μελέτης και χάραξης της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης, π.χ. η ανάγκη προσδιορισμού της μεγαλύτερης ή της μικρότερης τιμής ενός μεγέθους, κ.ο.κ. Να εξηγηθεί στους μαθητές ότι στο πλαίσιο αυτής της ενότητας θα διδαχθούν θεωρήματα και προτάσεις που υποβοηθούν τη συγκέντρωση πληροφοριών γύρω από τα σημαντικά στοιχεία μιας καμπύλης και τη χάραξη της.	22
	3.2 Το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού	- Διατυπώνουν το Θεώρημα Μέσης Τιμής (Θ.Μ.Τ.) του Διαφορικού Λογισμού και να εξηγούν τη γεωμετρική του σημασία - Εφαρμόζουν το Θ.Μ.Τ. στην απόδειξη άλλων θεωρημάτων και στην επίλυση ασκήσεων.	Το θεώρημα δίνεται χωρίς απόδειξη. Η απόδειξη του είναι έξω από τους στόχους του αναλυτικού προγράμματος. Γίνεται μόνο εποπτική επαλήθευση του θεωρήματος.	

	ΔΙΔΑΚΤΕΑ ΥΛΗ	ΣΤΟΧΟΙ	ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ	ΠΕΡ.
	3.3 Μονοτονία συνάρτησης	<i>Με τη συμπλήρωση της ύλης οι μαθητές θα πρέπει να μπορούν να</i> - Ορίζουν την αύξουσα/φθίνουσα/γνησίως αύξουσα/γνησίως φθίνουσα/σταθερή συνάρτηση σε διάστημα Δ - Διατυπώνουν και να εφαρμόζουν στη μελέτη της μονοτονίας συνεχούς συνάρτησης το κριτήριο: <i>Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε διάστημα $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ και παραγωγίζεται σε κάθε σημείο $x \in \Delta$, τότε οι πιο κάτω δύο προτάσεις είναι ισοδύναμες:</i> <i>α) Ισχύει $f'(x) \geq 0$ (αντίστοιχα $f'(x) \leq 0$) για κάθε $x \in \Delta$, επιπλέον όμως δεν υπάρχει κανένα υποδιάστημα του Δ τέτοιο ώστε η $f'(x)$ να μηδενίζεται σε κάθε σημείο του υποδιαστήματος αυτού.</i> <i>β) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα (αντιστοίχως γνησίως φθίνουσα) στο διάστημα Δ.</i>	Να γίνεται και εποπτική υποστήριξη του κριτηρίου.	
	3.4 Τοπικά ακρότατα	- Ορίζουν την τοπικά μέγιστη/τοπικά ελάχιστη τιμή μιας συνάρτησης - Ορίζουν τα σημεία τοπικών ακρότατων της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης. - Διακρίνουν μεταξύ της τοπικά μέγιστης/ελάχιστης τιμής και της ολικά μέγιστης/ελάχιστης τιμής μιας συνάρτησης. - Διατυπώνουν και να αποδεικνύουν την αναγκαία συνθήκη για να είναι ένα εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης, σημείο τοπικού ακρότατου (θεώρημα του Fermat): <i>Αν η f/Δ παρουσιάζει στο εσωτερικό σημείο x_0 του Δ τοπικό ακρότατο (μέγιστο ή ελάχιστο) και υπάρχει η $f'(x_0)$, τότε είναι $f'(x_0) = 0$.</i>	Να τονιστεί ότι συνάρτηση ορισμένη σε κλειστό διάστημα έχει ολικά μέγιστη και ολικά ελάχιστη τιμή. Να δοθεί και εποπτική υποστήριξη του θεωρήματος. Να τονιστεί ότι το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει κατ' ανάγκη, π.χ. στα Σ.Κ. Μπορούν επίσης να δοθούν και παραδείγματα συναρτήσεων που έχουν ακρότατο σε σημείο x_0, χωρίς να υπάρχει η $f'(x_0)$, π.χ. $y = x$, καθώς και περιπτώσεις ακρότατων τιμών στα άκρα του Π.Ο. συνάρτησης $f/[a,b]$, χωρίς κατ' ανάγκη μηδενική παράγωγο, π.χ. $y = ax + \beta$, $x \in [\gamma, \delta]$.	

A/A	ΔΙΔΑΚΤΕΑ ΥΛΗ	ΣΤΟΧΟΙ	ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ	ΠΕΡ.
		Με τη συμπλήρωση της ύλης οι μαθητές θα πρέπει να μπορούν να • Διατυπώνουν και να αποδεικνύουν το θεώρημα (κριτήριο της α' παραγώγου): <i>Έστω f συνάρτηση παραγωγίσιμη σε διάστημα (γ, δ) και $x_0 \in (\gamma, \delta)$ με $f'(x_0) = 0$.</i> <i>α) Αν $\forall x \in (\gamma, x_0)$ είναι $f'(x) > 0$ και $\forall x \in (x_0, \delta)$ είναι $f'(x) < 0$, τότε η τιμή $f(x_0)$ είναι τοπικά μέγιστη.</i> <i>β) Αν $\forall x \in (\gamma, x_0)$ είναι $f'(x) < 0$ και $\forall x \in (x_0, \delta)$ είναι $f'(x) > 0$, τότε η τιμή $f(x_0)$ είναι τοπικά ελάχιστη.</i> • Χρησιμοποιούν το κριτήριο της πρώτης παραγώγου για την εύρεση των ακρότατων τιμών συνάρτησης. • Διατυπώνουν και να εφαρμόζουν στην εύρεση ακρότατων τιμών συνάρτησης το θεώρημα (κριτήριο της β' παραγώγου): <i>Έστω f παραγωγίσιμη σε διάστημα Δ και x_0 εσωτερικό σημείο του Δ για το οποίο ισχύει $f'(x_0) = 0$ και υπάρχει η $f''(x_0)$:</i> <i>Αν $f''(x_0) < 0$, τότε η τιμή $f(x_0)$ είναι τοπικά μέγιστη.</i> <i>Αν $f''(x_0) > 0$, τότε η τιμή $f(x_0)$ είναι τοπικά ελάχιστη.</i>	Μπορεί να τονιστεί ότι το θεώρημα ισχύει και στην περίπτωση όπου η $f'(x)$ δεν υπάρχει στο x_0 και να δοθούν παραδείγματα όπως $y = x^{\frac{2}{3}}$, $y = x$, κ.ά. Να τονιστεί από αυτό το στάδιο ότι, στην περίπτωση όπου $f'(x_0) = 0$ και η f δεν αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0, τότε το σημείο $(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής. Η απόδειξη του θεωρήματος είναι έξω από τους στόχους του αναλυτικού προγράμματος. Μπορεί όμως να δοθεί εποπτική επαλήθευση του θεωρήματος. Οι μαθητές να καθοδηγηθούν να επιλέγουν το καταλληλότερο, κατά την περίπτωση, κριτήριο για το χαρακτηρισμό τοπικών ακρότατων.	

A/A	ΔΙΔΑΚΤΕΑ ΥΛΗ	ΣΤΟΧΟΙ	ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ	ΠΕΡ.
	3.5 Κοίλη/κυρτή συνάρτηση Σημεία καμπής	<i>Με τη συμπλήρωση της ύλης οι μαθητές θα πρέπει να μπορούν να</i> - Ελέγχουν την κοιλότητα/κυρτότητα του διαγράμματος μιας συνάρτησης από το πρόσημο της β' παραγώγου της - Ορίζουν τα σημεία καμπής του διαγράμματος μιας συνάρτησης (αλλαγή από κοίλα προς τα άνω σε κοίλα προς τα κάτω και αντίστροφα). - Δικαιολογούν με χρήση διαγράμματος ότι, αν σημείο $P(x_0, y_0)$ είναι σημείο καμπής, τότε $f''(x_0) = 0$ ή δεν υπάρχει η f'' στο x_0. - Εφαρμόζουν το κριτήριο εύρεσης σημείων καμπής: <i>Αν στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού συνάρτησης f είναι $f''(x_0) = 0$ και η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0, τότε το σημείο $P(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής του διαγράμματος της f.</i> - Εφαρμόζουν το κριτήριο εύρεσης σημείων καμπής: Αν στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού συνάρτησης f είναι $f'(x_0) = 0$ και η f' δεν αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του σημείου x_0, τότε το σημείο $P(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής	Να δοθούν παραδείγματα διαγραμμάτων και να σχολιαστεί ότι η εφαπτομένη στο σημείο καμπής του διαγράμματος της συνάρτησης «διαπερνά» το διάγραμμα. Να δοθούν και παραδείγματα όπου η κλίση της εφαπτομένης είναι μηδενική ή απειρίζεται. Να τονιστεί η πρακτική σημασία της πρότασης, ότι δηλαδή τα σημεία καμπής του διαγράμματος μιας συνάρτησης αναζητούνται στις ρίζες της β' παραγώγου της συνάρτησης (ανεξαρτήτως του μηδενισμού ή μη της α' παραγώγου).	

A/A	ΔΙΔΑΚΤΕΑ ΥΛΗ	ΣΤΟΧΟΙ	ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ	ΠΕΡ.
	3.6 Ασύμπτωτες ευθείες του διαγράμματος συνάρτησης 3.7 Γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων 3.8 Προβλήματα μεγίστων και ελαχίστων	<i>Με τη συμπλήρωση της ύλης οι μαθητές θα πρέπει να μπορούν να</i> - Ορίζουν και να βρίσκουν τις κατακόρυφες ασύμπτωτες του διαγράμματος μιας συνάρτησης - Ορίζουν και να βρίσκουν τις οριζόντιες ασύμπτωτες του διαγράμματος μιας συνάρτησης - Βρίσκουν τις πλάγιες ασύμπτωτες συναρτήσεων της μορφής $y = \frac{h(x)}{g(x)}$, όπου $h(x)$ και $g(x)$ ακέραια πολυώνυμα και ο βαθμός του $h(x)$ είναι κατά μία μονάδα μεγαλύτερος του βαθμού του $g(x)$. - Μελετούν και να παριστάνουν γραφικά συναρτήσεις των μορφών: α) Πολυωνυμικής μορφής. β) Της μορφής $y = \frac{f(x)}{g(x)}$, όπου $f(x)$ και $g(x)$ πολυώνυμα. γ) Υπερβατικές, των μορφών $y = e^x$, $y = \ln x$ και συνδυασμούς τους, όπως, $y = xe^{\pm x}$, $y = x^2 e^{\pm x}$, $y = e^{\frac{1}{x}}$, $y = x \ln x$, $y = \ln(ax + \beta)$, κ.ο.κ. - Εφαρμόζουν το κριτήριο ακρότατων στην επίλυση προβλημάτων	Στην εύρεση των κατακόρυφων ασύμπτωτων και των οριζόντιων ασύμπτωτων να εφαρμόζεται ο ορισμός.	

A/A	ΔΙΔΑΚΤΕΑ ΥΛΗ	ΣΤΟΧΟΙ	ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ	ΠΕΡ.
4.	ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ 4.1 Επανάληψη 4.2 Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις	<i>Με τη συμπλήρωση της ύλης οι μαθητές θα πρέπει να μπορούν να</i> - Ορίζουν πότε μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, είναι 1-1 από τον τύπο ή τη γραφική της παράσταση. - Αναγνωρίζουν πότε μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, είναι 1-1 από τον τύπο ή τη γραφική της παράσταση. - Αναγνωρίζουν πότε μια συνάρτηση f έχει αντίστροφη συνάρτηση. - Ορίζουν τις αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις, περιορίζοντας κατάλληλα το πεδίο ορισμού των αντίστοιχων τριγωνομετρικών συναρτήσεων - Βρίσκουν την παράγωγο των αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων.		3

A/A	ΔΙΔΑΚΤΕΑ ΥΛΗ	ΣΤΟΧΟΙ	ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ	ΠΕΡ.
5.	ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ	Με τη συμπλήρωση της ύλης οι μαθητές θα πρέπει να μπορούν να - Ορίζουν το αόριστο ολοκλήρωμα ως την αντιπαράγωγο μιας συνάρτησης $\int f(x) dx = F(x) + c \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$. - Αναφέρουν τα βασικά ολοκληρώματα $\int \lambda dx = \lambda \cdot x + c, \quad \int x^v dx = \frac{x^{v+1}}{v+1} + c, \quad v \neq -1$ $\int \frac{dx}{x} = \ln x + c, \quad \int e^x dx = e^x + c, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c,$ $\int \eta \mu x dx = -\sigma \upsilon \nu x + c, \quad \int \sigma \upsilon \nu x dx = \eta \mu x + c,$ $\int \tau \epsilon \mu^2 x dx = \epsilon \phi x + c, \quad \int \sigma \tau \epsilon \mu^2 x dx = -\sigma \phi x + c$ $\int \tau \epsilon \mu x \cdot \epsilon \phi x dx = \tau \epsilon \mu x + c,$ $\int \sigma \tau \epsilon \mu x \cdot \sigma \phi x dx = -\sigma \tau \epsilon \mu x + c$ $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \tau \omicron \xi \eta \mu x + c, \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \tau \omicron \xi \epsilon \phi x + c$ - Προσδιορίζουν τη σταθερά c, όταν δίνεται η κατάλληλη συνθήκη.	Θα πρέπει να τονιστεί ότι η συνάρτηση πρέπει να είναι συνεχής, για να υπάρχει το ολοκλήρωμα της. Οι τύποι των βασικών ολοκληρωμάτων να χρησιμοποιηθούν ως παραδείγματα για την εμπέδωση του ορισμού.	20

A/A	ΔΙΔΑΚΤΕΑ ΥΛΗ	ΣΤΟΧΟΙ	ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ	ΠΕΡ.
	5.3 Ιδιότητες	<i>Με τη συμπλήρωση της ύλης οι μαθητές θα πρέπει να μπορούν να</i> - Να αναφέρουν και να εφαρμόζουν τις ιδιότητες του διαφορικού στα ολοκληρώματα $\int d(x) = \int d(x+c) = \int d(x-c)$ $\int d(x) = \frac{1}{\lambda} \int d(\lambda x) = \lambda \int d\left(\frac{x}{\lambda}\right)$ - Αναφέρουν και να εφαρμόζουν τις ιδιότητες του αόριστου ολοκληρώματος $\int df(x) = f(x) + c$ $\int af(x) dx = a \int f(x) dx, \quad \alpha \text{ σταθερά}$ $\int \{f(x) \pm g(x)\} dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$ $\int f(u(x)) \cdot u'(x) dx = \int f(u) du$	Να εφαρμόζουν τις ιδιότητες στα βασικά ολοκληρώματα, π.χ. $\int f(ax+\beta) dx = \frac{1}{a} \int f(ax+\beta) d(ax+\beta)$ $\int f'(x) \cdot f'(x) dx = \int f'(x) df(x), \quad v \neq -1$ $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{df(x)}{f(x)} = \ln f(x) + c$ $\int e^{g(x)} \cdot g'(x) dx = e^{g(x)} + c$ $\int a^{g(x)} \cdot g'(x) dx = \frac{a^{g(x)}}{\ln a} + c$ $\int \sigma \nu \nu g(x) \cdot g'(x) dx = \eta \mu g(x) + c$... κτλ	

A/A	ΔΙΔΑΚΤΕΑ ΥΛΗ	ΣΤΟΧΟΙ	ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ	ΠΕΡ.
	5.4 Ολοκλήρωση με αντικατάσταση	Με τη συμπλήρωση της ύλης οι μαθητές θα πρέπει να μπορούν να - Υπολογίζουν ολοκληρώματα με αλγεβρική και τριγωνομετρική αντικατάσταση - Υπολογίζουν τριγωνομετρικά ολοκληρώματα	Να δοθούν παραδείγματα, όπως: α) τριγωνομετρικά ολοκληρώματα στα οποία ο παρονομαστής είναι άθροισμα ή διαφορά τριγωνομετρικών αριθμών, ή ολοκληρώματα ρητών τριγωνομετρικών συναρτήσεων $y = f(\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x)$ β) $\int f(\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x) dx$ γ) Ολοκληρώματα των μορφών: $\int f(x, \sqrt{ax + \beta}) dx,$ $\int f(x, \sqrt{a^2 - \beta^2 x^2}) dx,$ $\int f(x, \sqrt{a^2 + \beta^2 x^2}) dx,$ $\int f(x, \sqrt{x^2 - \beta^2 x^2}) dx,$ $\int f(x, \sqrt{\beta^2 x^2 - a^2}) dx.$ Στις δύσκολες περιπτώσεις η αντικατάσταση θα δίνεται. Να δοθούν παραδείγματα, όπως: α) $\int \eta\mu^{2\nu+1} x \sigma\upsilon\nu^{2\nu} x dx,$ $\int \eta\mu^{2\nu} x \sigma\upsilon\nu^{2\nu+1} x dx$ β) $\int \eta\mu^{2\nu} x dx,$ $\int \sigma\upsilon\nu^{2\nu} x dx,$ $\int \varepsilon\varphi^{2\nu} x dx$ γ) $\int \eta\mu^{\nu} x \sigma\upsilon\nu^{\nu} x dx$ δ) $\int \eta\mu(ax + \beta) \sigma\upsilon\nu(\gamma x + \delta) dx$	

A/A	ΔΙΔΑΚΤΕΑ ΥΛΗ	ΣΤΟΧΟΙ	ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ	ΠΕΡ.
	5.5 Ολοκλήρωση κατά παράγοντες 5.6 Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων	<i>Με τη συμπλήρωση της ύλης οι μαθητές θα πρέπει να μπορούν να</i> - Χρησιμοποιούν τη μέθοδο της παραγοντικής ολοκλήρωσης στον υπολογισμό ολοκληρωμάτων. - υπολογίζουν ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων της μορφής $\int \frac{f(x)}{g(x)} dx$, όπου $f(x)$ και $g(x)$ ακέραια πολυώνυμα, κατόπιν ανάλυσης σε άθροισμα απλών κλασμάτων.	Να δοθούν και παραδείγματα όπου ο βαθμός του $f(x)$ είναι μεγαλύτερος ή ίσος με το βαθμό του $g(x)$. Επίσης, παραδείγματα όπου ο παρονομαστής $g(x)$ καλύπτει τις ακόλουθες περιπτώσεις: α) Οι ρίζες του $g(x)$ είναι πραγματικές και άνισες. β) Μερικές από τις πραγματικές ρίζες του $g(x)$ είναι πολλαπλότητας μεγαλύτερης του ένα. γ) Μερικές από τις ρίζες του $g(x)$ είναι μιγαδικές, αλλά βαθμού πολλαπλότητας ένα.	

A/A	ΔΙΔΑΚΤΕΑ ΥΛΗ	ΣΤΟΧΟΙ	ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ	ΠΕΡ.
6.	ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ 6.1 Ορισμός και υπολογισμός ορισμένου ολοκληρώματος 6.2 Ιδιότητες	<i>Με τη συμπλήρωση της ύλης οι μαθητές θα πρέπει να μπορούν να</i> - Ορίζουν το ορισμένο ολοκλήρωμα ως άθροισμα: $\int_a^{\beta} f(x) dx = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \sum_{\kappa=1}^{\nu} f(x_{\kappa}) \cdot \Delta x$ - Αναφέρουν τον τύπο του ορισμένου ολοκληρώματος $\int_a^{\beta} f(x) dx = F(\beta) - F(\alpha) \quad \text{όπου } F(x) \text{ αόριστο ολοκλήρωμα της } f(x)$ και να τον εφαρμόζουν στην εύρεση ορισμένων ολοκληρωμάτων - Υπολογίζουν ορισμένα ολοκληρώματα με αντικατάσταση. - αναφέρουν και να αποδεικνύουν τις ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος $\int_a^{\alpha} f(x) dx = 0, \quad \int_a^{\beta} f(x) dx = \int_a^{\beta} f(u) du$	Να προσεχθεί η συνέχεια συνάρτησης στο διάστημα $[a, \beta]$. Να δοθούν ασκήσεις ώστε να τονιστεί η σημασία του ορισμού. Να λυθούν ασκήσεις και με την αλλαγή των ορίων και με επιστροφή στην αρχική μεταβλητή.	12

A/A	ΔΙΔΑΚΤΕΑ ΥΛΗ	ΣΤΟΧΟΙ	ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ	ΠΕΡ.
	6.3 Εφαρμογές	Με τη συμπλήρωση της ύλης οι μαθητές θα πρέπει να μπορούν να $\int_a^{\beta} f(x) dx = - \int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx$ $\int_a^{\beta} f(x) dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx$ $\int_a^{\beta} [\lambda f(x) \pm \mu g(x)] dx = \lambda \int_a^{\beta} f(x) dx + \mu \int_a^{\beta} g(x) dx$ Εφαρμόζουν το ορισμένο ολοκλήρωμα για να υπολογίζουν: α) Εμβαδόν χωρίου που περικλείεται από μια καμπύλη, τον άξονα των x (ή των ψ) και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ (ή $\psi = \alpha$ και $\psi = \beta$) β) εμβαδόν χωρίου που περικλείεται μεταξύ των καμπύλων $y = f_1(x)$ και $y = f_2(x)$ και των ευθειών $x = \alpha$ και $x = \beta$ (ή των καμπύλων $x = f_1(y)$ και $x = f_2(y)$ και των ευθειών $\psi = \alpha$ και $\psi = \beta$) γ) Όγκο στερεών εκ περιστροφής γύρω από έναν από τους άξονες των συντεταγμένων, όταν η καμπύλη δίνεται με καρτεσιανή εξίσωση	Η εύρεση του όγκου που παράγεται από περιστροφή επίπεδου χωρίου γύρω από ευθεία $x = \alpha$ ή $y = \beta$, αφήνεται στην κρίση του καθηγητή, ο οποίος θα δράσει σύμφωνα με τις δυνατότητες των μαθητών.	

A/A	ΔΙΔΑΚΤΕΑ ΥΛΗ	ΣΤΟΧΟΙ	ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ	ΠΕΡ.
7.	ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ 7.1 Αρχή της απαρίθμησης και εφαρμογές 7.2 Ιδιότητες των συνδυασμών n ανά k	<i>Με τη συμπλήρωση της ύλης οι μαθητές θα πρέπει να μπορούν να</i> - Ορίζουν το n! - Διατυπώνουν και να εφαρμόζουν στη λύση προβλημάτων την αρχή της απαρίθμησης. - Αποδεικνύουν και να εφαρμόζουν στη λύση ασκήσεων και προβλημάτων τους τύπους: α) των μεταθέσεων των n διαφορετικών αντικειμένων β) των κυκλικών μεταθέσεων των n διαφορετικών αντικειμένων γ) των επαναληπτικών μεταθέσεων των n αντικειμένων δ) των διατάξεων των n διαφορετικών αντικειμένων ανά k ε) των επαναληπτικών διατάξεων των n αντικειμένων ανά k - στ) των συνδυασμών των n διαφορετικών αντικειμένων ανά k - Αποδεικνύουν και να εφαρμόζουν τις ιδιότητες: $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix}$		12

A/A	ΔΙΔΑΚΤΕΑ ΥΛΗ	ΣΤΟΧΟΙ	ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ	ΠΕΡ.
8.	ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ Πιθανότητες	<i>Με τη συμπλήρωση της ύλης οι μαθητές θα πρέπει να μπορούν να</i> - Αναφέρουν από τη θεωρία των συνόλων τις βασικές έννοιες, πράξεις και ιδιότητες. - Γνωρίζουν τι είναι το πείραμα τύχης και τα απλά ενδεχόμενα του. - Ορίζουν το δειγματικό χώρο ενός πειράματος τύχης. - Ορίζουν την πιθανότητα ενός ενδεχομένου κατά Laplace και να εφαρμόζουν τον ορισμό στη λύση προβλημάτων. - Γνωρίζουν τους βασικούς ορισμούς και πράξεις μεταξύ των ενδεχομένων. - Γνωρίζουν την αξιωματική θεμελίωση της θεωρίας πιθανοτήτων (αξιώματα Kolmogorov). - Αποδεικνύουν με τη θεωρία των συνόλων και να εφαρμόζουν τις ιδιότητες των πιθανοτήτων: $P(A') = 1 - P(A), \quad P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ - Γνωρίζουν την έννοια της δεσμευμένης ή υπό συνθήκη πιθανότητας και να εφαρμόζουν τον τύπο του Bayes στη λύση προβλημάτων. - Γνωρίζουν την έννοια των ανεξάρτητων ενδεχομένων.	Να αναφερθούν οι τύποι του de Morgan: $(A \cup B)' = A' \cap B'$ $(A \cap B)' = A' \cup B'$	14

A/A	ΔΙΔΑΚΤΕΑ ΥΛΗ	ΣΤΟΧΟΙ	ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ	ΠΕΡ.
9.	ΠΙΝΑΚΕΣ Πίνακες	<i>Με τη συμπλήρωση της ύλης οι μαθητές θα πρέπει να μπορούν να</i> • Γράφουν σύνολο πληροφοριών υπό μορφή πίνακα. • Ορίζουν τον πίνακα μχν και να συμβολίζουν τυχαίο στοιχείο του. • Αναγνωρίζουν τις μορφές πινάκων (πίνακας-γραμμή, πίνακας-στήλη, μηδενικός, τετραγωνικός, διαγώνιος, μοναδιαίος, συμμετρικός, αντισυμμετρικός πίνακας) • Αναγνωρίζουν πότε δύο πίνακες μχν είναι ίσοι. • Προσθέτουν και να αφαιρούν πίνακες ίδιας τάξης. • Εφαρμόζουν τις ιδιότητες του αθροίσματος πινάκων. • Πολλαπλασιάζουν πίνακα επί πραγματικό αριθμό. • Εφαρμόζουν τις ιδιότητες του πολλαπλασιασμού αριθμού επί πίνακα. • Να αναγνωρίζουν πότε δύο πίνακες είναι σύμφωνοι για πολλαπλασιασμό. • Βρίσκουν το γινόμενο πινάκων (μχν) x (νχρ). • Να ορίζουν τον αντίστροφο πίνακα και να εφαρμόζουν τις σχετικές ιδιότητες. • Βρίσκουν τον αντίστροφο ενός πίνακα 2×2.		6

A/A	ΔΙΔΑΚΤΕΑ ΥΛΗ	ΣΤΟΧΟΙ	ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ	ΠΕΡ.
10.	ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ	<i>Με τη συμπλήρωση της ύλης οι μαθητές θα πρέπει να μπορούν να</i> - Αναφέρουν απλούς Γεωμετρικούς Τόπους (Γ.Τ.) από την Ευκλείδειο Γεωμετρία. - Εκφράζουν την ιδιότητα των σημείων του Γ.Τ. υπό μορφή σχέσης μεταξύ των συντεταγμένων τυχόντος σημείου του Γ.Τ. - Βρίσκουν την καρτεσιανή εξίσωση της καμπύλης πάνω στην οποία βρίσκονται τα σημεία του Γ.Τ. - Βρίσκουν την καρτεσιανή εξίσωση του Γ.Τ. αν οι συντεταγμένες του τυχόντος σημείου του Γ.Τ. δίνονται στη μορφή $x = f(t), y = g(t)$ ή $x = f(t, \rho), y = g(t, \rho)$ με απαλοιφή των παραμέτρων.		4

A/A	ΔΙΔΑΚΤΕΑ ΥΛΗ	ΣΤΟΧΟΙ	ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ	ΠΕΡ.
11.	ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ 11.1 Κύκλος	<i>Με τη συμπλήρωση της ύλης οι μαθητές θα πρέπει να μπορούν να</i> - Ορίζουν τον κύκλο ως Γ.Τ. και να βρίσκουν την εξίσωση του $(x-a)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$, όταν δίνεται το κέντρο $K(\alpha, \beta)$ και η ακτίνα R. - Αναφέρουν τη γενική εξίσωση του κύκλου $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ και να εκφράζουν το κέντρο και την ακτίνα του, σε συνάρτηση με τις σταθερές g, f και c $(K(-g, -f) \text{ και } R = \sqrt{g^2 + f^2 - c})$. - Αναγνωρίζουν πότε μια εξίσωση της μορφής $ax^2 + by^2 + \gamma x + \delta y + \varepsilon = 0$ παριστάνει κύκλο. - Εφαρμόζουν τα πιο πάνω στη λύση ασκήσεων. - Αναφέρουν τις δυνατές θέσεις μιας ευθείας ως προς τον κύκλο. - Βρίσκουν τη θέση μιας ευθείας ως προς τον κύκλο. - Βρίσκουν την εξίσωση της εφαπτομένης και της κάθετης κύκλου σε σημείο του $T(x_1, y_1)$. - Βρίσκουν τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του κύκλου: α) όταν είναι γνωστή η κλίση τους και β) όταν άγονται από σημείο εκτός του κύκλου. - Αναφέρουν τις δυνατές θέσεις δύο κύκλων. - Βρίσκουν τη θέση δύο δεδομένων κύκλων.	Να γίνει φανερό στους μαθητές ότι η χρήση γνώσεων από την Ευκλείδειο Γεωμετρία μπορεί να απλοποιήσει πολύ την επίλυση ασκήσεων και προβλημάτων.	35

A/A	ΔΙΔΑΚΤΕΑ ΥΛΗ	ΣΤΟΧΟΙ	ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ	ΠΕΡ.
		<i>Με τη συμπλήρωση της ύλης οι μαθητές θα πρέπει να μπορούν να</i> - Ορίζουν, συμβολίζουν και υπολογίζουν τη δύναμη σημείου T ως προς κύκλο (K, R). - Βρίσκουν τη θέση σημείου T ως προς κύκλο (K, R) με τη βοήθεια της δύναμης $\Delta_K(T)$ του σημείου T. - Αναφέρουν τις παραμετρικές εξισώσεις κύκλου με κέντρο $K(\alpha, \beta)$ και ακτίνα R και να τις εφαρμόζουν στη λύση ασκήσεων.		
	11.2 Γενικά περί κωνικών τομών	- Αναγνωρίζουν τις γραφικές παραστάσεις της παραβολής, της έλλειψης και της υπερβολής (και του κύκλου ως ειδικής περίπτωσης της έλλειψης) - Ορίζουν τις κωνικές τομές ως επίπεδες τομές ορθού κυκλικού κώνου και να διακρίνουν τις προϋποθέσεις κάτω από τις οποίες μπορεί να προκύψει το κάθε είδος καμπύλης. - Αναφέρουν βασικές ιδιότητες της κάθε κωνικής τομής και τις πρακτικές εφαρμογές των ιδιοτήτων αυτών	Να παρουσιαστούν γραφικές παραστάσεις των καμπύλων και να αναλυθούν και να σχολιαστούν προηγούμενες γνώσεις γι' αυτές. Να εξηγηθεί ότι μπορεί να οριστούν ως επίπεδες τομές κώνου και ως γεωμετρικοί τόποι με βάση χαρακτηριστικές ιδιότητες τους. Με τον ορισμό των καμπύλων ως επίπεδων τομών κώνου μπορεί να γίνει και σύντομη ιστορική αναφορά στη μελέτη τους. Να παρουσιαστούν βασικές ιδιότητες των καμπύλων και πρακτικές εφαρμογές τους.	

A/A	ΔΙΔΑΚΤΕΑ ΥΛΗ	ΣΤΟΧΟΙ	ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ	ΠΕΡ.
	11.3 Παραβολή	<i>Με τη συμπλήρωση της ύλης οι μαθητές θα πρέπει να μπορούν να</i> - Ορίζουν την παραβολή ως το γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου τα οποία απέχουν εξίσου από δοθέν σημείο (εστία) και δοθείσα ευθεία (διευθετούσα). - Βρίσκουν, με βάση τον ορισμό της παραβολής, την καρτεσιανή της εξίσωση. - Ορίζουν τη γεωμετρική σημασία της παραμέτρου α στην εξίσωση $\psi^2 = 4\alpha\chi$ της παραβολής. - Παριστάνουν γραφικά τις παραβολές $\psi^2 = 4\alpha\chi$ και $\chi^2 = 4\alpha\psi$. - Ορίζουν και να βρίσκουν σε δοθείσα παραβολή τα στοιχεία της: εστία, διευθετούσα, κορυφή, άξονας συμμετρίας, διάμετρος, χορδή, ορθό πλάτος (latus rectum). - Βρίσκουν την εξίσωση της εφαπτομένης και της κάθετης σε σημείο $T(\chi, \psi)$ της παραβολής. - Βρίσκουν τις δυνατές θέσεις ευθείας ως προς παραβολή. - Αναφέρουν και να χρησιμοποιούν τις παραμετρικές εξισώσεις της παραβολής.	Αφού γίνει η γραφική παράσταση της $\psi^2 = 4\alpha\chi$, $\alpha > 0$, οι άλλες περιπτώσεις να προκύψουν απλά ως μετασχηματισμοί της. Ειδικά για την περίπτωση της $\chi^2 = 4\alpha\psi$ να τονιστεί ότι αυτή είναι γνωστή από την Α' Λυκείου. Μπορεί να αναφερθεί στους μαθητές η ιδιότητα του παραβολικού κατόπτρου και να δοθούν παραδείγματα εφαρμογής στην καθημερινή ζωή.	

A/A	ΔΙΔΑΚΤΕΑ ΥΛΗ	ΣΤΟΧΟΙ	ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ	ΠΕΡ.
	11.4 Έλλειψη	<i>Με τη συμπλήρωση της ύλης οι μαθητές θα πρέπει να μπορούν να</i> - Ορίζουν την έλλειψη ως το γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων, από δύο δοθέντα σημεία του επιπέδου (εστίες), είναι σταθερό. - Βρίσκουν, με βάση τον ορισμό της έλλειψης, την καρτεσιανή της εξίσωση. - Παριστάνουν γραφικά την έλλειψη $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \alpha > \beta$. (αντίστοιχα $\alpha < \beta$) και να βρίσκουν τα στοιχεία της, εστίες, κορυφές, άξονες, κέντρο, χορδή, διάμετρο. - Υπολογίζουν την εκκεντρότητα της έλλειψης $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ από τις τιμές των παραμέτρων α και β και να αναγνωρίζουν τη σημασία της εκκεντρότητας στον καθορισμό της μορφής της έλλειψης. - Αναφέρουν και να αποδεικνύουν ότι ο λόγος των αποστάσεων του τυχαίου σημείου $T(x, y)$ της έλλειψης από την εστία $E(\gamma, 0)$ και τη διευθετούσα ευθεία $\delta: x = \frac{a}{e}$ (αντίστοιχα $E'(-\gamma, 0)$ και $\delta: x = -\frac{a}{e}$) είναι σταθερός και ισούται με την εκκεντρότητα της έλλειψης. - Βρίσκουν την εξίσωση της εφαπτομένης και της κάθετης σε σημείο $T(x_1, y_1)$ της έλλειψης. - Βρίσκουν τη θέση σημείου $T(x_1, y_1)$ ως προς έλλειψη. - Βρίσκουν τις δυνατές θέσεις ευθείας ως προς έλλειψη. - Αναφέρουν, να δικαιολογούν και να χρησιμοποιούν τις παραμετρικές εξισώσεις της έλλειψης.	Μπορεί να αναφερθεί και ο τρόπος χάραξης της έλλειψης με συνεχή κίνηση. Να τονιστεί ότι η ιδιότητα αυτή αποτελεί ισοδύναμο ορισμό της έλλειψης. Η απόδειξη της ιδιότητας να ζητηθεί ως άσκηση. Να μην αφιερωθεί πολύς χρόνος για αποδείξεις στην τάξη, αφού η διαδικασία είναι γνωστή. Μπορεί να αναφερθεί στους μαθητές η ανακλαστική ιδιότητα ελλειπτικού κατόπτρου και να δοθούν παραδείγματα πρακτικών εφαρμογών.	

A/A	ΔΙΔΑΚΤΕΑ ΥΛΗ	ΣΤΟΧΟΙ	ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ	ΠΕΡ.
	ΙΣΟΣΚΕΛΗΣ ΥΠΕΡΒΟΛΗ ($xy=c^2$)	<i>Με τη συμπλήρωση της ύλης οι μαθητές θα πρέπει να μπορούν να</i> - Ορίζουν την υπερβολή ως το γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου των οποίων η διαφορά των αποστάσεων από δύο σταθερά σημεία του επιπέδου (εστίες) έχει σταθερή απόλυτη τιμή. - Ορίζουν την ειδική περίπτωση της ισοσκελούς υπερβολής με εστίες $E(\alpha, \alpha)$ και $E'(-\alpha, -\alpha)$ και με απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων κάθε σημείου της από τις εστίες 2α, $\alpha > 0$. - Βρίσκουν, με βάση τον ορισμό, την καρτεσιανή εξίσωση της ισοσκελούς υπερβολής με εστίες $E(\alpha, \alpha)$ και $E'(-\alpha, -\alpha)$ και με απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων κάθε σημείου της από τις εστίες ίση με 2α, $\alpha > 0$. - Παριστάνουν γραφικά την ισοσκελή υπερβολή $xy=c^2$, (αντίστοιχα $xy=-c^2$) και ορίζουν τα στοιχεία της: εστίες, κορυφές, άξονες, κέντρο, ασύμπτωτες, χορδές, διάμετροι. - Βρίσκουν την εξίσωση της εφαπτομένης και της κάθετης της ισοσκελούς υπερβολής σε σημείο της. - Αναφέρουν και να χρησιμοποιούν τις παραμετρικές εξισώσεις της ισοσκελούς υπερβολής $xy=c^2$.	Να μελετηθεί μόνο η περίπτωση της ισοσκελούς υπερβολής η οποία έχει ως ασύμπτωτες τους άξονες των συντεταγμένων.	
	ΓΕΝΙΚΗ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ		Να γίνει επίλυση ασκήσεων και προβλημάτων για εμπέδωση και κατανόηση των εννοιών της κάθε ενότητας. Να γίνει επίλυση ασκήσεων και προβλημάτων που συνδέουν έννοιες και γνώσεις από διαφορετικές ενότητες και περιοχές.	12