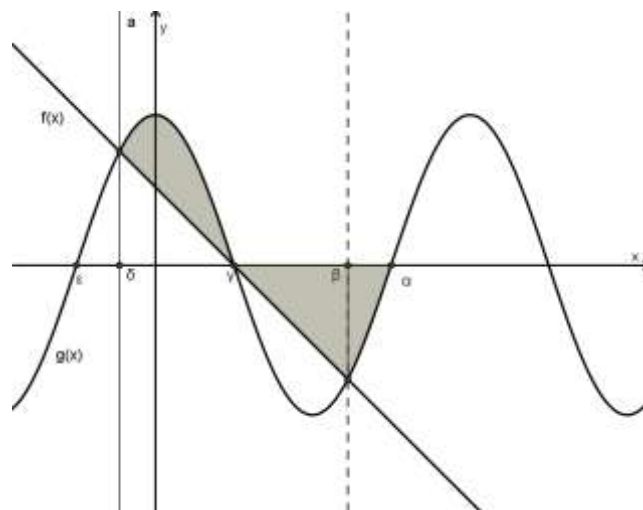
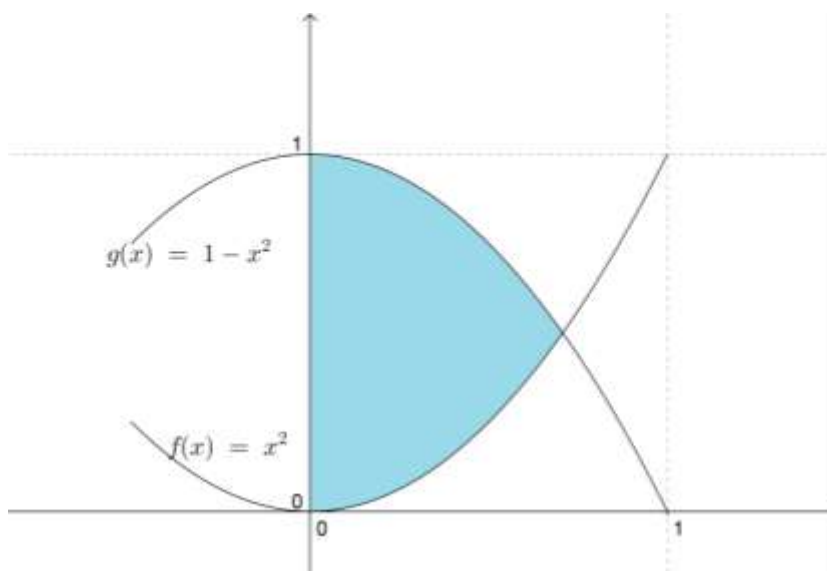


1. Με την βοήθεια των ολοκληρωμάτων των συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$ να βρείτε το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους του διπλανού σχήματος



2. Να βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες $y^2 = x$ και $x^2 = 8y$, όταν περιστραφεί γύρω από τον άξονα $x'x$.
3. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = (x-2)(x-4)$ και την ευθεία $y = x-2$
4. Το εμβαδόν που περικλείεται από την καμπύλη $y = x^2 - ax$ και του άξονα των τετμημένων είναι ίσο με $\frac{32}{3}$ τ.μ. Να βρείτε την αριθμητική τιμή του a .
5. T είναι το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη $y = e^{3x}$, τους άξονες και την ευθεία $x = 1$. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του T γύρω από τον άξονα $y'y$.
6. Χωρίο περικλείεται από την καμπύλη $\psi = e^x$ και τις ευθείες $\psi = e^2$ και $x = -1$
 - α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του πιο πάνω χωρίου και
 - β) τον όγκο που παράγει αν περιστραφεί πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα Ox .
7. Επίπεδο χωρίο που σχηματίζεται από την $\psi = 3x - x^2$ και τον άξονα των x περιστρέφεται πλήρη περιστροφή γύρω από τον άξονα $O\psi$.
Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται.
8. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του μέρους του επιπέδου που περικλείεται από την καμπύλη $\psi = -x^2 + 1$, την ευθεία $\psi = x + 1$ και τον άξονα xx' .

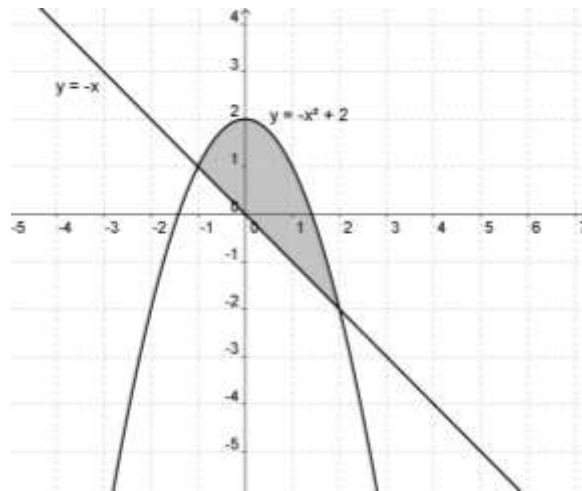
9. Αν T είναι το χωρίο που περικλείεται από τις συναρτήσεις $y = e^x$, $y = e^{-x}$ και την ευθεία $x = \ln 2$,
- να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου T .
 - να βρεθεί ο όγκος που παράγει το χωρίο T αν αυτό περιστραφεί κατά 2π γύρω από τον άξονα των x .
10. Να βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του χωρίου που σχηματίζεται από την καμπύλη $\psi = (x-1)^2$ και την ευθεία $\psi = 1$ γύρω από τον άξονα $\psi\psi'$.
11. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = x^2 + 3x + 2$ και τον άξονα των x .
12. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y^2 = x$ και την ευθεία $y = x - 2$. Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που παράγει το χωρίο που περικλείεται από την $y^2 = x$ την $y = x - 2$ και τον άξονα των y αν αυτό περιστραφεί γύρω από τον άξονα των y .
13. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της σκιασμένης επιφάνειας.



14. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη $y = e^{2x}$, τους άξονες και την ευθεία $x = \ln 2$, όταν στραφεί πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των x .
15. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη $y = x^2 - 1$ και την ευθεία $y = x - 1$, όταν στραφεί πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των y .

16. Δίνονται οι καμπύλες $y^2 = 4x$ και $x^2 = 4y$. Να αποδείξετε ότι χωρίζουν την επιφάνεια του τετραγώνου που περικλείεται από τις ευθείες $x = 0, x = 4, y = 4$ και $y = 0$ σε τρία ίσεμβαδικά μέρη.

17. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της σκιασμένης επιφάνειας.



18. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη $y = e^{2x}$, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $y = 4$, όταν στραφεί πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των y .

19. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη $y = x^2 - 1$ και την ευθεία $y = x - 1$, όταν στραφεί πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των x .

20. Δίνονται οι καμπύλες $y^2 = -4x$ και $x^2 = 4y$. Να αποδείξετε ότι χωρίζουν την επιφάνεια του τετραγώνου που περικλείεται από τις ευθείες $x = 0, x = -4, y = 4$ και $y = 0$ σε τρία ίσεμβαδικά μέρη.

21. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = x^3 + 1$, την ευθεία $x = 1$ και τον άξονα $x'x$.

22. Να βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του χωρίου που σχηματίζεται από την υπερβολή $xy = 4$ την ευθεία $y = x$ και την ευθεία $y = 1$ γύρω από τον άξονα $x'x$.

23. α) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx$, $x=R\eta\mu\theta$ $\left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$

β) Να βρείτε το εμβαδόν του κύκλου : $x^2 + y^2 = R^2$

24. Αν **T** είναι το χωρίο που περικλείεται από τις συναρτήσεις $y = e^x$, $y = 1$ και την $x = 1$

iii. να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου **T**.

iv. να βρεθεί ο όγκος που παράγει το χωρίο **T** αν αυτό περιστραφεί κατά 2π γύρω από τον άξονα των y .

25. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την παραβολή $y^2 = x$ και την ευθεία $y = x - 2$.

26. Δίνεται η συνάρτηση $y = e^x$.

α) Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της στο σημείο $A(1, e)$ είναι η ευθεία $y = e \cdot x$

β) Να βρείτε το εμβαδόν E_1 του χωρίου που περικλείεται από τις $y = e^x$, $y = e \cdot x$ και $x = 0$.

γ) Να βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του χωρίου E_1 γύρω από τον άξονα $x'x$.

27. α) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις συναρτήσεις $y = x^2 + 1$, $y = 3x^2 + 1$ και την ευθεία $x = 1$.

β) Να βρείτε τον όγκο του πιο πάνω χωρίου όταν στραφεί γύρω από τον άξονα oy .

28. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 8x$ και το σημείο της $A(2, 4)$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου, που περικλείεται από την παραβολή και την κάθετη της στο σημείο A .

29. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = x^2 - 6x + 8$ και την ευθεία $y = x - 2$

30. Το εμβαδόν που περικλείεται από την καμπύλη $y = x^2 - ax$ και του άξονα των τετμημένων είναι ίσο με $\frac{32}{3}$ τ.μ. Να βρείτε την αριθμητική τιμή του a .

31. Αν **T** είναι το χωρίο που περικλείεται από τις καμπύλες $y = x^2$ και $y = \ln x$ την ευθεία $y = 1$ και τον άξονα των x να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του **T** γύρω από τον άξονα $x'x$

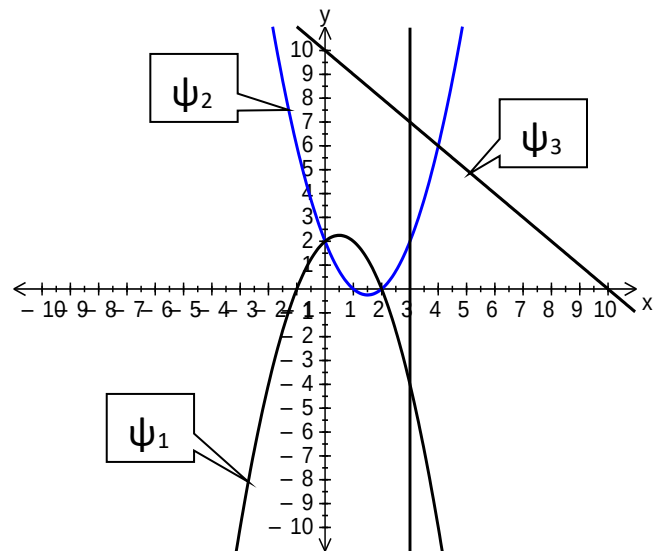
32. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 2x$ με $a > 0$ και σημείο της $P(x_0, y_0)$ στο Α τεταρτημόριο. Από το σημείο P να φέρετε τις κάθετες προς τους άξονες των x και y έτσι ώστε να σχηματίζεται ορθογώνιο. Το ορθογώνιο χωρίζει την παραβολή σε δύο χωρία τα οποία περιστρέφονται γύρω από τον άξονα των y να δείξετε ότι ο λόγος των όγκων των 2 στερεών που σχηματίζονται είναι 4:1

33. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του μέρους του επιπέδου που περικλείεται από την καμπύλη $\psi = 4 - \chi^2$ και την ευθεία $\psi = 2\chi + 1$.

34. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του μέρους του επιπέδου που περικλείεται από τις καμπύλες $\psi = e^{-\chi}$ και $\psi = e^{\chi}$ και τις ευθείες $\chi = -1$ και $\chi = 2$.

35. α) Να σκιάσετε στο διπλανό σχήμα το εμβαδόν που αναπαριστά η πιο κάτω παράσταση ολοκληρωμάτων :

$$\int_0^2 (\psi_1 - \psi_2) d\chi + \int_2^3 (\psi_2 - \psi_1) d\chi + \int_3^4 (\psi_3 - \psi_2) d\chi$$



36. Δίνονται οι καμπύλες $\psi = \frac{2}{\chi}$, $\psi = 2$ και $\chi = 4$. Να βρείτε :

α) Το εμβαδόν που περικλείεται από τις τρεις καμπύλες.
β) Τον όγκο που παράγεται από την πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των χ του πιο πάνω χωρίου.

37. Αν T είναι το χωρίο που περικλείεται από τις καμπύλες $\psi = \sqrt{\chi}$, $\psi = \sqrt{2-\chi}$ και τον άξονα των χ τότε :

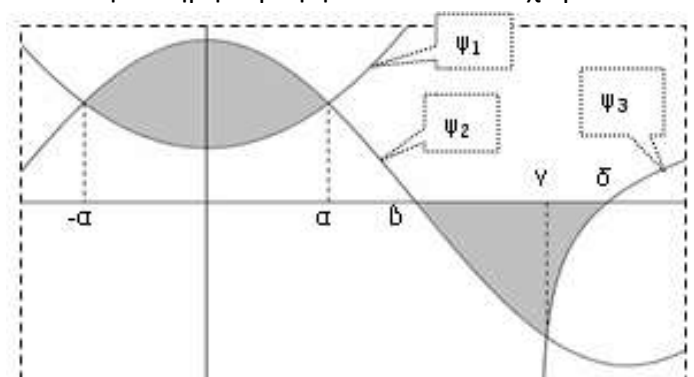
α) Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες του σημείου τομής των δύο καμπύλων είναι $(1,1)$.
β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου T .
γ) Να βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη στροφή του χωρίου T γύρω από τον άξονα των χ

38. Δίνονται οι καμπύλες $y = \ln x$ και $y = \ln \frac{1}{x}$.

α) Αν το εμβαδό το οποίο βρίσκεται μεταξύ των πιο πάνω καμπύλων και της ευθείας $y = a$, $a > 0$ είναι ίσο με $e^a - \frac{5}{3}$, τότε να δείξετε ότι $a = \ln 3$.

β) Αν $a = \ln 3$ τότε να βρείτε τον όγκο που παράγεται από την πλήρη στροφή του πιο πάνω χωρίου γύρω από τον άξονα των ψ .

39. Να εκφράσετε το σκιασμένο εμβαδόν όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα συναρτήσεων ψ_1, ψ_2, ψ_3 .



40. α) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των καμπύλων $\psi^2 = 8\chi$ και $\psi = \chi^2$
 β) Όταν το παραπάνω χωρίο κάνει πλήρη περιστροφή γύρω από τον άξονα των χ παράγει όγκο V_χ . Να υπολογίσετε αυτό τον όγκο.

41. α) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο και περικλείεται από τις καμπύλες $\psi^2 = 4\chi$, $\psi = \ln\chi$, τον άξονα των χ και την ευθεία $\chi = e$.

β) Να βρείτε τον όγκο που παράγει το χωρίο που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο και περικλείεται από τις καμπύλες $\psi^2 = 4\chi$, $\psi = \ln\chi$, τον άξονα των χ και την ευθεία $\psi = 1$ αν κάνει πλήρη περιστροφή γύρω από τον άξονα των ψ .

42. Δίνεται η καμπύλη $\psi = 4 - \chi^2$.

α) Να δ.ο. η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο $A(2,0)$ είναι: $\psi = -4\chi + 8$ (ϵ_1)

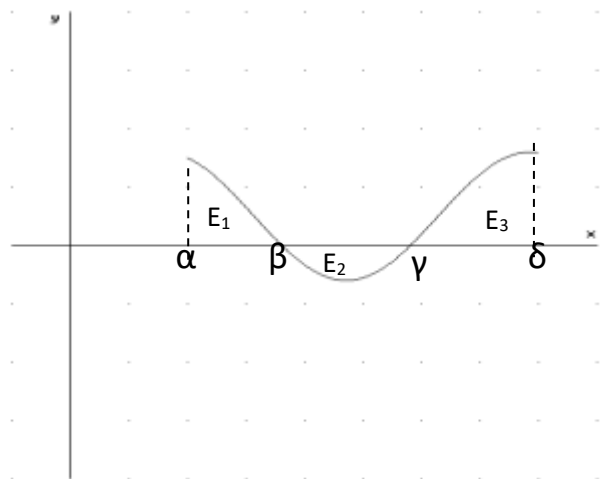
β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου A που περικλείεται από την καμπύλη $\psi = 4 - \chi^2$, την εφαπτόμενη (ϵ_1) και τον άξονα $O\psi$.

γ) Η ευθεία $\psi = \lambda\chi + 4$ χωρίζει το χωρίο A σε δύο ισεμβαδικά χωρία. Να βρείτε την τιμή του λ .

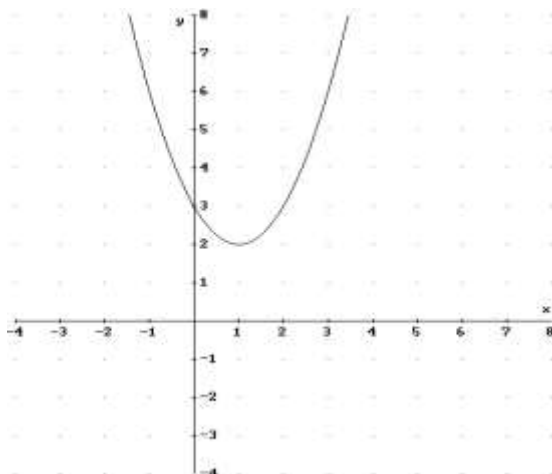
43. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η συνάρτηση f αν E_1, E_2 και E_3 τρία εμβαδά που ορίζονται από την f τον άξονα των χ

και τις ευθείες $\chi = \alpha$ και $\chi = \beta$ έτσι ώστε $E_1 = 2$, $E_2 = 1$ και

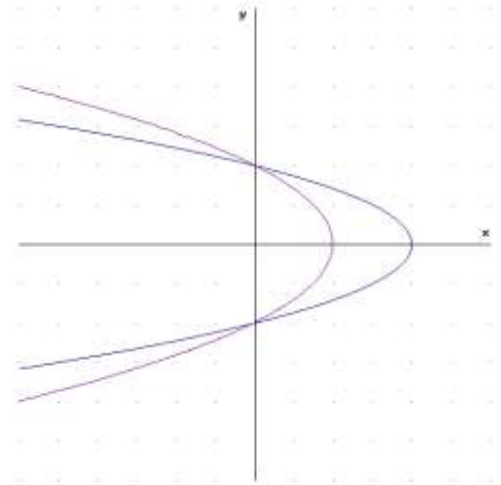
$E_3 = 3$ τότε να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$



44. Στο διπλανό σύστημα αξόνων δίνεται η γραφική παράσταση της $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $f(x)$ τις ευθείες $\chi = 0$, $\chi = 2$ και τον άξονα των χ .



45. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη στροφή του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες $\psi^2 = \chi$, $\chi\psi = 1$ και την ευθεία $\chi = 4$, γύρω από
 α) τον άξονα των χ
 β) τον άξονα των ψ

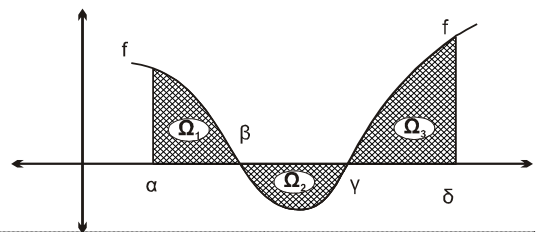


46. Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι καμπύλες $\psi^2 = -\chi + 4$ και $\psi^2 = 2\chi + 4$. Να βρείτε :
 α) το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται μεταξύ των δύο καμπύλων.
 β) τον όγκο του στερεού που παράγεται από την στροφή του πιο πάνω χωρίου κατά π γύρω από τον άξονα των χ .

47. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες $y = e^x$, $y = \ln x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = e$
48. Το χωρίο που περικλείεται από τις καμπύλες $x^2 + y^2 = 5$ και $xy = 2$ και βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο, περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των Ox . Να βρείτε τον όγκο του στερεού που δημιουργείται.
49. Το χωρίο που περικλείεται από τις καμπύλες $x^2 + y^2 = 5$ και $xy = 2$ και βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο, περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των Ox . Να βρείτε τον όγκο του στερεού που δημιουργείται.

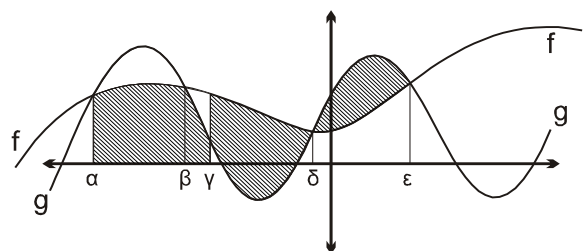
50. Επίπεδο χωρίο που σχηματίζεται από την $y = 3x - x^2$ και τον άξονα των x περιστρέφεται πλήρη περιστροφή γύρω από τον άξονα Oy . Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται.

51. Έστω η συνάρτηση $f(x)$ του διπλανού σχήματος. Αν $E(\Omega_1) = 2$, $E(\Omega_2) = 1$ και $E(\Omega_3) = 3$ τότε το $\int_a^b f(x) dx$ είναι ίσο με



(i) 6	(ii) -4	(iii) 4	(iv) 0	(v) 2
--------------	----------------	----------------	---------------	--------------

52. Να εκφράσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου μέρους του σχήματος με την βοήθεια ολοκληρωμάτων των συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$



53. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = x^3 + 1$, την ευθεία $y = 9$ και τον άξονα των y .

54. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες $y = x^2 + 1$, $y = x^2 - 4x + 5$ και την ευθεία $y = 1$.

55. α) Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό $x=4\eta\mu\theta$, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^2 \sqrt{16 - x^2} dx$.

β) Δίνονται ο κύκλος $x^2 + y^2 = 16$ και η παραβολή $y^2 = 6x$.

i.	Να βρείτε τα σημεία τομής τους και να σχεδιάσετε τις δύο καμπύλες σε κοινό σύστημα αξόνων
ii.	Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των δύο καμπύλων και βρίσκεται στο τεταρτημόριο που αντιστοιχεί στους δύο θετικούς ημιάξονες.

56. α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου T που περικλείεται από την καμπύλη $y = x^2$, τις ευθείες $x = -3$, $x = 1$ και τον άξονα των x .

β) Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του χωρίου T γύρω από τον άξονα των x .

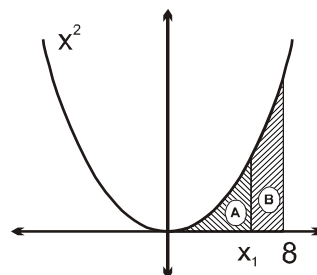
57. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου T που περικλείεται από την καμπύλη $y^2 = 4x$ και την ευθεία $y = 2x - 4$

58. Αν T είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = e^x$ και τις ευθείες $y = 1$ και $x = 1$. Να υπολογίσετε τον όγκο που παράγεται από την περιστροφή του χωρίου T γύρω από τον άξονα των x

59. α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου T που περικλείεται από την καμπύλη $y = x^2$, τις ευθείες $x = -3$, $x = 1$ και τον άξονα των x .

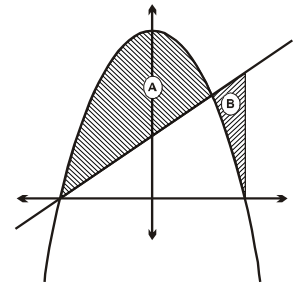
β) Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του χωρίου T γύρω από τον άξονα των x .

60. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2$. Αν για τα εμβαδά των χωρίων A και B ισχύει ότι: $3 \cdot E(A) = E(B)$ να βρεθεί η τιμή του x_1 .



61. Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι καμπύλη των συναρτήσεων
 $y = 9 - x^2$ και $y = x + 3$

- | | |
|------|---|
| (i) | Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου. |
| (ii) | Να υπολογίσετε τον όγκο που παράγεται, από μια πλήρη περιστροφή γύρω από τον άξονα των y , του χωρίου που περικλείεται από τις δύο καμπύλες και τον άξονα των y . |



62. Να βρεθεί το εμβαδόν του μέρους του επιπέδου που περικλείεται από τις ευθείες $\psi = x - 1$ και $\psi + x - 3 = 0$ και τον άξονα των x .

63. α) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x = a \sin \theta$ $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο να

υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του μέρους του επιπέδου που περικλείεται από την καμπύλη $x^2 + \psi^2 = 4$ και την ευθεία $x + \psi = 2$.

γ) Να υπολογίσετε τον όγκο που παράγεται από την πλήρη περιστροφή γύρω από τον άξονα των x του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $x^2 + \psi^2 = 4$ και την ευθεία $x + \psi = 2$.

64. Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από το διάγραμμα της συνάρτησης $y = x^2 - 2x$ και από την ευθεία $y = x$.

65. Δίνεται η συνάρτηση $y = \ln x$ και οι ευθείες $x = 1$ και $y = 2$.

- Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από το διάγραμμα της $y = \ln x$ και από τις δυο ευθείες.
- Να βρεθεί ο όγκος που παράγει το πιο πάνω χωρίο αν περιστραφεί κατά 2π γύρω από τον άξονα των y .

66. Το χωρίο που ορίζεται από το διάγραμμα της συνάρτησης $y = \sqrt{x}$, τον άξονα των x και την ευθεία $x = 2$ χωρίζεται από την ευθεία $x = c$, $0 < c < 2$ σε δυο χωρία E_1 και E_2 . Τα πιο πάνω χωρία περιστρέφονται κατά 2π γύρω από τον άξονα των x και παράγουν στερεά με ίσους όγκους. Να βρείτε το c .

67. Δίνεται η παραβολή $x^2 = 4y$ και τα σημεία $M_1(6,9)$, $M_2(-2,1)$ σημεία της. Από τα σημεία M_1, M_2 φέρω εφαπτόμενες προς την παραβολή.

(α) Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων.

(β) Να αποδειχθεί ότι το σημείο επαφής των εφαπτομένων είναι $A(2, -3)$.

(γ) Να γίνει το σχήμα.

(δ) Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την παραβολή και τις εφαπτομένες.

68. Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που παράγεται αν το χωρίο που περικλείεται από τους άξονες την καμπύλη $y=\ln x$ και την ευθεία $y=2$ στραφεί πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των x .

69. Δίνεται κύκλος $x^2 + y^2 = 4$, παραβολή $y^2 = 4x$ και υπερβολή $y = \frac{1}{x}$

Ο όγκος που δημιουργείται από το χωρίο μεταξύ των τριών καμπύλων και του ημιάξονα OX όταν το σχήμα κάνει πλήρη στροφή γύρω από τον OY δίνεται από την πιο κάτω σχέση. Να συμπληρώσετε τα κενά:

$$V = \pi \int_{\dots}^{y_{\Delta}} (x_{\text{κύκλου}}^2 - x_{\dots}^2) dy + \pi \int_{\dots}^{y_{\dots}} (x_{\dots}^2 - \frac{2}{\text{παραβολής}}) dy$$

