

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο

1.1 ΟΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ.

1.

α) Να κάνετε έναν άξονα χ' Ο χ και να τοποθετήσετε πάνω σ' αυτόν τους αριθμούς:

0, 1, -1, π , $-\pi$, $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$

β) Να υπολογίσετε τις απόλυτες τιμές των παραπάνω αριθμών

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμά τους και το γινόμενό τους.

2.

Καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις μπορεί να είναι **σωστή**, μπορεί όμως να είναι **λάθος**.

Γράψτε δίπλα από κάθε πρόταση το **Σ** αν αυτή είναι σωστή και το **Λ** αν αυτή είναι λάθος.

- Ο αριθμός $-\chi$ είναι ένας αρνητικός ρητός αριθμός.
- Ο αριθμός $-\chi$ είναι ο αντίθετος του αριθμού χ και μπορεί να είναι θετικός ή αρνητικός αν ο χ είναι αρνητικός ή θετικός αντίστοιχα.
- Οι αντίθετοι αριθμοί έχουν αντίθετες απόλυτες τιμές.
- Οι αντίθετοι αριθμοί έχουν την ίδια πάντα απόλυτη τιμή αφού αυτή εκφράζει την απόσταση των σημείων του άξονα στα οποία αυτοί μπαίνουν από την αρχή του.
- Η απόλυτη τιμή ενός αριθμού είναι πάντα μη αρνητικός αριθμός.
- Η απόλυτη τιμή ενός αριθμού μπορεί να είναι και αρνητικός αριθμός.
- Ο αντίθετος του χ είναι ίσος με το γινόμενο του -1 με τον χ δηλαδή $-\chi = (-1) \cdot \chi$
- Οι ομόσημοι αριθμοί έχουν γινόμενο αριθμό ομόσημο μ' αυτούς.
- Οι ομόσημοι αριθμοί έχουν γινόμενο έναν θετικό αριθμό.
- Οι ετερόσημοι έχουν γινόμενο έναν αρνητικό αριθμό.
- Οι αντίθετοι αριθμοί έχουν γινόμενο αρνητικό αριθμό.
- Αν a ένας ρητός αριθμός τότε $a \cdot 1 = a$ και $a \cdot 0 = 0$.
- Οι αντίστροφοι αριθμοί έχουν γινόμενο 0
- Οι αντίστροφοι αριθμοί έχουν γινόμενο -1
- Οι αντίστροφοι αριθμοί έχουν γινόμενο 1

3.

Σε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις επιλέξτε το σωστό συμπέρασμα συμπληρώνοντας τον πίνακα που ακολουθεί.

1. Το γινόμενο δύο αριθμών είναι αρνητικός αριθμός

A. Οι αριθμοί είναι αρνητικοί. B. Οι αριθμοί είναι ομόσημοι. Γ. Οι αριθμοί είναι ετερόσημοι.
Δ. Οι αριθμοί είναι θετικοί.

2. Το γινόμενο δύο αριθμών είναι αριθμός θετικός.

A. Οι αριθμοί είναι αρνητικοί. B. Οι αριθμοί είναι ομόσημοι. Γ. Οι αριθμοί είναι ετερόσημοι.
Δ. Οι αριθμοί είναι θετικοί.

3. Έστω οι ρητοί αριθμοί α, β, γ ώστε $\alpha\beta\gamma = 1$

A. Οι αριθμοί α, β, γ είναι αντίστροφοι. B. Οι αριθμοί α, β, γ είναι ομόσημοι.
Γ. Ο αριθμός α είναι αντίστροφος του β . Δ. Ο αριθμός α είναι αντίστροφος του $\beta\gamma$.

4. Έστω οι ρητοί αριθμοί α, β ώστε $-3 \cdot (\alpha + \beta) = 0$.

A. Οι αριθμοί α, β είναι αντίστροφοι. B. Οι αριθμοί α, β είναι 0.
Γ. Ο αριθμός α είναι αντίθετος του β . Δ. Ισχύει $\alpha + \beta = 3$.

5. Το γινόμενο και το άθροισμα δύο αριθμών είναι αριθμός θετικός.

A. Οι αριθμοί είναι αρνητικοί. B. Οι αριθμοί είναι ομόσημοι. Γ. Οι αριθμοί είναι ετερόσημοι.
Δ. Οι αριθμοί είναι θετικοί.

Πρόταση	1	2	3	4	5
Σωστό συμπέρασμα					

4.

Γνωρίζοντας ότι $\alpha - \beta = -1$ και $\chi + \psi = 7$ να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων με την βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας:

$$\Pi_1 = -2\alpha + 2\beta + 5\chi + 5\psi$$

$$\Pi_2 = 4 \cdot (\chi + \psi + 5\alpha) - 20\beta$$

$$\Pi_3 = 2\alpha + 3\alpha - 5\beta + 7\chi + 2\psi + 5\psi$$

$$\Pi_4 = \alpha - \beta + \chi + 8\psi - 3\psi + 4\chi$$

$$\Pi_5 = \chi\alpha + \psi\alpha - \chi\beta - \psi\beta$$

5.

Καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις μπορεί να είναι **σωστή**, μπορεί όμως να είναι **λάθος**.

Γράψτε δίπλα από κάθε πρόταση το **Σ** αν αυτή είναι σωστή και το **Λ** αν αυτή είναι λάθος.

- Για δύο ρητούς αριθμούς **a** και **b** διαφορετικούς από το 0 ισχύει: **a : b = b : a**
- Για τον αριθμό **a** διαφορετικό του 0 ισχύει: **0 : a = 0**
- Για τον αριθμό **a** ισχύει: **a : 0 = a**
- Για τον αριθμό **a** διαφορετικό του 0 ισχύει: **a : (-a) = -1**
- Για τον αριθμό **a** διαφορετικό του 0 ισχύει: **a : $\frac{1}{a}$ = 1**
- Για τον αριθμό **a** ισχύει: **a : 1 = 1**
- Για τον αριθμό **a** διαφορετικό του 0 ισχύει: **- a : (-a) = -1**
- Για τον αριθμό **a** ισχύει: **a : (-1) = -a**
- Το πηλίκο **a : b** με **b** διαφορετικό του 0 παριστάνει το γινόμενο του **a** με τον αντίστροφο του **b**

6.

Συμπληρώστε τις παρακάτω προτάσεις:

- **$\chi \cdot a = a$ τότε $\chi =$ **
- **$-a \cdot \chi = 2a$ τότε $\chi =$ **
- **$\chi : (-a) = -1$ τότε $\chi =$ **
- **$a : \chi = -1$ τότε $\chi =$ **
- **Οι αντίθετοι αριθμοί έχουν πηλίκο**

7.

Έστω κ , λ δύο ακέραιοι αριθμοί με γινόμενο -2 .

α) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών για τους κ , λ :

Τιμή του κ		
Τιμή του λ		

β) Να υπολογίσετε το άθροισμα των κ , λ .

8.

Να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων.

$$\Pi_1 = \frac{3 - \frac{1}{2}}{-2 : (-3 + 2)} : \frac{5}{2}$$

$$\Pi_2 = \frac{\chi(\psi - \frac{2}{\chi}) - \psi(\frac{3}{\psi} + \chi)}{-7\left(\frac{3}{14} + \frac{2}{7}\right)} : (-5)$$

$$\Pi_3 = \frac{-2 - \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}$$

9.

Να γίνουν οι πράξεις

$$\alpha) \frac{\frac{2}{-5} + \frac{-4}{3} - \frac{-2}{5}}{-1 - \frac{1}{3}}$$

$$\beta) \left(-\frac{1}{-3} + \frac{-7}{3} - 2 \right) : \left(\frac{-2}{4004} \right)$$

$$\gamma) -\frac{-2 - (-2) \cdot (-5)}{-6 : \frac{2}{3}} + \frac{(-10) : (-2) - (-3) \cdot 2 + 1}{-8 \cdot 2} : \frac{-4}{3}$$

10.

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\Pi = (200 + 196 + 192 + \dots + 8 + 4) - (198 + 194 + 190 + \dots + 6 + 2) \quad (\text{Ε.Μ.Ε. 1999})$$

11.

Αν για τους αριθμούς α, β ισχύει: $\frac{\alpha + \beta}{\beta} = 3$, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

$$A = \frac{\alpha - \beta}{\beta}, \quad B = \frac{-2\alpha + 3\beta}{-\beta}, \quad \Gamma = \frac{4\alpha - 3\beta}{3\alpha - 4\beta}$$

1.2 ΔΥΝΑΜΕΙΣ.

1.

Να συμπληρώσετε τις ισότητες : α) $-2^4 = \dots$ β) $(-2)^3 = \dots$ γ) $-2^3 = \dots$ δ) $(-2)^4 = \dots$

2.

Ομοίως:

- Αν v : άρτιος, τότε $(-1)^v = \dots$
- Αν v : περιττός, τότε $(-1)^v = \dots$

3.

Αν $a^{k+\lambda} = 1$, τότε ποια από τις παρακάτω ισότητες είναι σωστή;

Α.: $k = \lambda$ Β.: $k + \lambda \neq 0$ Γ.: $a = 0$ Δ.: $a \neq 0$ και $k = -\lambda$

4.

Αν $a \neq 0$, τότε : $(a^a)^{2a} = \dots$

Α.: a^{3a} Β.: a^{2a^2} Γ.: a^{2a} Δ.: a^3

Επιλέξτε την σωστή απάντηση.

5.

Αν $5^x = (-5)^x$, τότε ο ακέραιος αριθμός x είναι

Α.: 1 Β.: -1 Γ.: ένας περιττός ακέραιος Δ.: ένας άρτιος ακέραιος

Επιλέξτε την σωστή απάντηση.

6.

Δίνονται οι δυνάμεις: $(-x^3)^{-2v}$, $(-x^{2v})^{-3}$, $(-x^{-2v})^{-3}$, όπου v : φυσικός αριθμός.

- α) Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού x ορίζονται ;
- β) Να βρείτε αν είναι αρνητικοί ή θετικοί αριθμοί .
- γ) Προσθέστε τις 2 πρώτες. Τι αριθμοί είναι;
- δ) Πολλαπλασιάστε τις 2 τελευταίες. Τι αριθμοί είναι ;

7.

Στις παρακάτω προτάσεις επιλέξτε τη σωστή απάντηση:

- $5^{v+2} - 5^{v+1} = \dots$ Α.: 5^{v+1} Β.: 5^v Γ.: $4 \cdot 5^{v+1}$ Δ.: 5 Ε.: $5^{(v+2):(v+1)}$
- $4 \cdot 3^{v+3} - 10 \cdot 3^{v+2} = \dots$ Α.: $-6 \cdot 3^{v+1}$ Β.: $-6 \cdot 3^{v+5}$ Γ.: $-6 \cdot 3^{2v+5}$ Δ.: $18 \cdot 3^{v+2}$ Ε.: $2 \cdot 3^{v+2}$
- $4^{v+2} + 6 \cdot (-2)^{2v+1} = \dots$ Α.: 2^{2v+1} Β.: $(-2)^{2(v+1)}$ Γ.: $4 \cdot 2^{2v+1}$ Δ.: $(-2)^{2v}$ Ε.: $(-2)^{2v+1}$

8.

Να λυθεί η εξίσωση $(2/3)^{x-3} = (3/2)^{2x}$

9.

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = (3^{v+4} - 6 \cdot 3^{v+1}) \cdot (3^{v+2} \cdot 7)^{-1}$.

Εξαρτάται η τιμή της, απ' την τιμή του φυσικού αριθμού v ;

10.

Να υπολογίσετε τις δυνάμεις:

$$A = [(-2)^{-3}]^2 \quad B = [-(-2)^3]^2 \quad \Gamma = - [(-2)^3]^2 \quad \Delta = (-1)^2 \cdot (-2)^3 \quad E = (-2^2)^3$$

11.

Να γράψετε τους παρακάτω αριθμούς ως δυνάμεις με βάση το 2 ή το -2 .

$$A = 1 \quad B = 16 \quad \Gamma = -32 \quad \Delta = 1/8 \quad E = -1/128$$

12.

Να βρείτε το x σε κάθε περίπτωση:

$$A) 2^x = 16 \quad B) 5^x = 125 \quad \Gamma) 3^x = 27 \quad \Delta) 3^x \cdot 5^x = 225 \quad E) 2^x \cdot 5^x = 100$$

13.

Προσπαθήστε να γράψετε τις παραστάσεις που ακολουθούν , εφαρμόζοντας τις ιδιότητες των δυνάμεων , σε γινόμενο πρώτων παραγόντων , όπως στο παράδειγμα: $9^3 \cdot 18^4 \cdot 50 \cdot 5^3 = (3^2)^3 \cdot (2 \cdot 3^2)^4 \cdot (2 \cdot 5^2) \cdot 5^3 = 3^6 \cdot 2^4 \cdot (3^2)^4 \cdot 2 \cdot 5^2 \cdot 5^3 = 3^6 \cdot 2^4 \cdot 3^8 \cdot 2 \cdot 5^2 \cdot 5^3 = 3^{6+8} \cdot 2^{4+1} \cdot 5^{2+3} = 3^{14} \cdot 2^5 \cdot 5^5$

$$A = \frac{(-2)^3 \cdot 6^{-2} \cdot 4^2}{8^5 \cdot 27^{-1}} \quad B = \frac{[(-3)^2]^{-1} \cdot [-(-6)^3]^{-2}}{(-12)^{-2} \cdot (-3)^{-10}} \quad \Gamma = \frac{1000 \cdot 225 \cdot (-6)^{-4}}{(-3^2)^3 \cdot (-2)^5}$$

$$\Delta = \frac{(-1000)^{-3} \cdot (1000^3)^0 \cdot 225^3}{(-36)^5 \cdot (-8)^{-2}} \quad E = \frac{(-12)^{-3} \cdot (-50)^2}{1000 \cdot 27^{-1} \cdot (-4)^{-2}}$$

14.

Εφαρμόζοντας ιδιότητες δυνάμεων να γράψετε σε πιο απλή μορφή τις παραστάσεις:

$$A = (x^{-2} \cdot x^{-3})^{-2} \quad B = (x^3 \cdot x^4 \cdot x^5) \cdot (x^{-6} \cdot x^2) \quad \Gamma = (x^4 \cdot x^2)^2 : (x^2 \cdot x^3)^3$$

$$\Delta = x^7 : (x^5 \cdot x^3) \quad E = [(x^{-3})^{-3}]^{-3} : [x^{-6} \cdot x^{-10}]^3$$

15.

Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$A) 8^{3x} = 4 \quad B) (-6)^{2x-1} = 1 \quad \Gamma) 27^{2-3x} = 81 \quad \Delta) (-2)^{2-3x} = -8 \quad E) (3 - 2x)^{2004} = 0$$

16.

Εφαρμόζοντας ιδιότητες δυνάμεων να γράψετε σε απλούστερη μορφή τις παραστάσεις και στη συνέχεια να τις υπολογίσετε

$$A = \frac{x^{-13} \cdot y^2 \cdot (x^{-2} \cdot y^{-3})^3 \cdot (x^{-3} \cdot y^2)^{-2}}{(x^4 \cdot y^3)^{-4}} \quad \text{για } x = (-10)^2 \text{ και } y = -10^6 .$$

$$B = \frac{(x^3 \cdot y)^{-3} \cdot (x^2 \cdot y^{-3})^{-1}}{(x^{-3} \cdot y^{-2})^3 \cdot (x \cdot y^{-3})^{-2}} \quad \text{για } x = (-2)^{-3} \text{ και } y = -2^3$$

$$\Gamma = \frac{(x^2 \cdot y^{-2})^3 \cdot (x^{-1} \cdot y^2)^4}{(x^5 : y^2)^{-3} \cdot (x^3 \cdot y^{-1})^2} \quad \text{για } x = 10^5 \text{ και } y = (-0,1)^{-2}$$

$$\Delta = \frac{(x^{-2} : y^{-3})^3 \cdot x^{-4}}{(y^2 : x^3)^2 : y^{-6}} \quad \text{για } x = 2^{-2} \text{ και } y = -4^4$$

$$E = \frac{(x^{-3} : y^{-2})^{-1} \cdot x}{y^6 : (x^2)^2}$$

$$\text{για } x = -3^3 \text{ και } y = 3^{-3}$$

17.

Αν $a^x = 2$, $a^y = 3$ και $2^y \cdot 3^x = (a^2)^{x+y}$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $x^{-1} + y^{-1}$, όπου οι αριθμοί a , x , y είναι θετικοί πραγματικοί, $a \neq 1$

18.

Έστω ότι ισχύει : $[9^v \cdot 3^2 \cdot (3^{-v})^{-1} - 27^v] \cdot (3^u \cdot 2)^{-3} = 27^{-1}$, όπου u , v φυσικοί αριθμοί. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί u και v είναι διαδοχικοί φυσικοί.

19.

Μία μπάλα όταν πέφτει από κάποιο ύψος αναπηδά και φτάνει στο μισό αυτού του ύψους. Αφήνουμε την μπάλα να πέσει από κάποιο ύψος x .

α) Να υπολογίσετε σε σχέση με το x το ύψος που θα φτάσει η μπάλα μετά από:

- 1 αναπήδηση.
- 2 αναπηδήσεις.
- 3 αναπηδήσεις .
- n αναπηδήσεις.

β) Αν αφήσουμε την μπάλα από ύψος 1m να βρείτε μετά από ποια αναπήδηση θα φτάσει σε ύψος 6,25 cm.

γ) Να υπολογίσετε από ποιο ύψος αφήσαμε την μπάλα να πέσει αν μετά την 10^n αναπήδηση έφτασε στα 2^{-9} m.

20.

Να δείξετε ότι το άθροισμα $9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{999\dots 9}_{2002 \text{ 9 άρια}}$ είναι ίσο με τη διαφορά:

$$\underbrace{111\dots 10}_{2002} - 2002$$

21.

Να υπολογίσετε τους αριθμούς α , β αν γνωρίζετε ότι: $\alpha\beta^2 = 2$ και $\alpha^3\beta = -2^{-2}$.

22.

Αν $2^x = \alpha$ και $a^y = \beta$ και $\beta^z = 1$ δείξτε ότι ένας τουλάχιστον από τους x , y , z είναι ίσος με 0.

23.

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $(15^{20} \cdot 8^{10} \cdot 27^{-5}) : (10^{19} \cdot 12^5)$

1.3 ΡΙΖΕΣ.

1.

Να συμπληρώσετε τις ισότητες : α) $\sqrt{0,04} = \dots$ β) $\sqrt{225} = \dots$ γ) $\sqrt{10^6} = \dots$ δ) $\sqrt{\sqrt{16}} = \dots$

2.

Συμπληρώστε τις προτάσεις:

- Αν $\sqrt{a} = x$ με a, x μη αρνητικούς αριθμούς τότε ισχύει
- Αν $\sqrt{a^2} = a$ τότε ο αριθμός a πρέπει να είναι
- Αν $\sqrt{a^2} = -a$, τότε ο αριθμός a πρέπει να είναι.....
- Αν a οποιοσδήποτε αριθμός τότε $\sqrt{a^2} = \dots\dots$
- Αν $a \geq 0$ τότε $(\sqrt{a})^2 = \dots\dots$
- Αν $a \geq 0$ τότε $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = \dots\dots$
- Αν $x \geq 0$ και $\sqrt{5} = x$ τότε $x^2 = \dots\dots$
- Αν $x^2 = 5$ και $x \geq 0$ τότε $x = \dots\dots$
- Αν $x^2 = 5$ και $x < 0$ τότε $x = \dots\dots$

3.

Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων :

α) $\sqrt{0,02} \sqrt{0,08} = \dots$ β) $\sqrt{2003} \sqrt{2003} = \dots$ γ) $\frac{\sqrt{a^5}}{\sqrt{a}} = \dots$ δ) $\sqrt{\frac{\sqrt{16}}{2}} \sqrt{200} = \dots$

4.

α) Να αναλύσετε τους αριθμούς 8, 12, 18, 20, 27 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

β) Στον παρακάτω πίνακα να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της α' στήλης του σε ένα μόνο στοιχείο της β' στήλης του συμπληρώνοντας τον επόμενο πίνακα.

Αριθμός	Τετραγωνική ρίζα αριθμού
8	$3\sqrt{3}$
12	$2\sqrt{2}$
18	$3\sqrt{2}$
20	$2\sqrt{3}$
27	$2\sqrt{5}$

Αριθμός					
Τετραγωνική ρίζα του αριθμού					

5.

Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

$A = (\sqrt{5} + \sqrt{5} + \sqrt{5})\sqrt{5}$ $B = 2\sqrt{8} - 4\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - \sqrt{18}$ $\Gamma = \sqrt{50} - \sqrt{2} - \sqrt{32}$

$\Delta = \frac{\sqrt{28} - \sqrt{63}}{\sqrt{700}}$ $E = (\sqrt{75} + \sqrt{125})\sqrt{20}$

6.

Έστω οι θετικοί αριθμοί a, x για τους οποίους ισχύει $x\sqrt{x} = a$

α) Να δείξετε ότι ισχύει $x^3 = a^2$

β) Αν $x^3 = 32$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $a\sqrt{2}$

7.

Έστω οι θετικοί αριθμοί α, β, γ για τους οποίους ισχύει: $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$.

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\sqrt{\beta^2 + \gamma \sqrt{\alpha^2 - \beta \sqrt{\beta \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}}}} - \alpha$$

8.

Να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων:

$$A = \sqrt{1 + \sqrt{43 + \sqrt{31 + \sqrt{15 + \sqrt{100}}}}} \sqrt{18}$$

$$B = \sqrt{\frac{4}{3} \sqrt{\sqrt{12} \sqrt{\sqrt{9}}} \sqrt{1,5}}$$

9.

Να υπολογίσετε τους αγνώστους χ, ψ, ω αν

$$\chi\sqrt{3} = \sqrt{300}, \quad \psi\sqrt{\chi} = \sqrt{90}, \quad \chi\psi\sqrt{\omega} = 1$$

10.

Αν το τετράγωνο ενός αρνητικού αριθμού χ είναι 5, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = (\chi\sqrt{\chi^2})^3 + 125$$

11.

Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις με ρητό παρονομαστή

$$\bullet \frac{1}{\sqrt{2}} =$$

$$\bullet \frac{3}{\sqrt{12}} =$$

$$\bullet \frac{3}{\sqrt{3}} =$$

$$\bullet \frac{\sqrt{20} - \sqrt{45}}{\sqrt{80}}$$

$$\bullet \frac{2}{3\sqrt{8}}$$

$$\bullet \sqrt{\frac{2}{3}}$$

12.

Να κάνετε τις πράξεις:

$$\alpha) (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)$$

$$\beta) (\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})$$

$$\gamma) (2 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5})$$

$$\delta) (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})$$

$$\varepsilon) (\alpha - \sqrt{\beta})(\alpha + \sqrt{\beta})$$

13.

Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς παρονομαστή

$$\alpha) \frac{1}{\sqrt{2}-1}$$

$$\beta) \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

$$\gamma) \frac{2+\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}$$

$$\delta) \frac{\alpha-\beta}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}$$

14.

Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις με ρητό παρονομαστή

$$\alpha) \frac{1}{\sqrt{3}-1}$$

$$\beta) \frac{5}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}$$

$$\gamma) \frac{4+\sqrt{5}}{4-\sqrt{5}}$$

$$\delta) \frac{1}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}$$

15.

Να υπολογίσετε την τιμή των παρακάτω παραστάσεων:

$$A = \sqrt{\sqrt{(\sqrt{3}-1)}\sqrt{(\sqrt{3}+1)}} + \sqrt{3}\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

$$B = (\sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{2})(1 + \sqrt{24})$$

16.

Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου είναι 4 cm^2 . Η μία του διάσταση είναι $\sqrt{5}-1 \text{ cm}$

α) Να υπολογίσετε την άλλη διάστασή του.

β) Να δείξετε ότι η περίμετρός του είναι $4\sqrt{5} \text{ cm}$.

17.

Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης:

$$\Pi = \sqrt{7}\sqrt{(\sqrt{2})^0 + (\sqrt{2})^1 + (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^3 + (\sqrt{2})^4 + (\sqrt{2})^5}\sqrt{\sqrt{2}-1} \text{ είναι ίση με } 7.$$

18.

α. Να υπολογίσετε το τετράγωνο της παράστασης: $\sqrt{3} + \sqrt{2}$

β. Να βρείτε την τετραγωνική ρίζα της παράστασης: $5 + 2\sqrt{6}$

19.

Να υπολογίσετε την τιμή των παρακάτω παραστάσεων:

$$A = \frac{1}{\sqrt{1}-\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{4}}$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{1}-\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{4}-\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}-\sqrt{100}}$$

20.

Έστω α, β δύο αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί για τους οποίους ισχύει: $\alpha^4 = \beta^2$.

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $2004^{\alpha+\sqrt{-\beta}}$

21.

Να υπολογίσετε την τετραγωνική ρίζα του αριθμού: $2^{2^{2^2}}$.

1.4 ΔΙΑΤΑΞΗ ΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ.

1.

α) Έστω α, β δύο θετικοί πραγματικοί αριθμοί με $\alpha > \beta$.

Να τοποθετήσετε στο κενό (...) το κατάλληλο σύμβολο ($>$, $<$, $=$):

- $\alpha + \beta \dots 0$
- $\alpha - \beta \dots 0$
- $\alpha\beta \dots 0$

- $\frac{\alpha}{\beta} \dots 0$
- $\beta - \alpha \dots 0$
- $-\alpha - \beta \dots 0$
- $\alpha(-\beta) \dots 0$
- $\alpha - (\beta - 2) \dots 0$
- $\alpha + 2 - \beta \dots 0$

β) Έστω α, β δύο αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί με $\alpha > \beta$.

Να τοποθετήσετε στο κενό (...) το κατάλληλο σύμβολο ($>$, $<$, $=$) :

- $\alpha + \beta \dots 0$
- $\alpha - \beta \dots 0$
- $\alpha\beta \dots 0$
- $\frac{\alpha}{\beta} \dots 0$
- $\beta - \alpha \dots 0$
- $-\alpha - \beta \dots 0$
- $\alpha(-\beta) \dots 0$
- $\alpha - (\beta - 2) \dots 0$
- $\alpha + 2 - \beta \dots 0$

2.

Να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις με μία από τις εκφράσεις : «προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά» , «προκύπτει ανισότητα αντίθετης φοράς» ή «δεν μπορούμε να γνωρίζουμε αν προκύπτει ανισότητα ίδιας ή αντίθετης φοράς» :

- Αν και στα δύο μέλη μιας ανισότητας προσθέσουμε τον ίδιο αριθμό τότε
.....
- Αν και στα δύο μέλη μιας ανισότητας αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό τότε
.....
- Αν και στα δύο μέλη μιας ανισότητας πολλαπλασιάσουμε τον ίδιο αριθμό τότε
.....
- Αν και στα δύο μέλη μιας ανισότητας πολλαπλασιάσουμε τον ίδιο θετικό αριθμό τότε
.....
- Αν και στα δύο μέλη μιας ανισότητας πολλαπλασιάσουμε τον ίδιο αρνητικό αριθμό τότε
.....
- Αν και στα δύο μέλη μιας ανισότητας διαιρέσουμε τον ίδιο θετικό αριθμό τότε
.....
- Αν και στα δύο μέλη μιας ανισότητας διαιρέσουμε τον ίδιο αρνητικό αριθμό τότε
.....
- Αν προσθέσουμε κατά μέλη δύο ανισότητες της ίδιας φοράς τότε
.....
- Αν αφαιρέσουμε κατά μέλη δύο ανισότητες της ίδιας φοράς τότε
.....

3.

α) Να τοποθετήσετε στο κενό (...) το κατάλληλο σύμβολο ($>$, $<$, $=$) :

- Αν α ένας θετικός αριθμός τότε $\alpha \dots 0$
- Αν α ένας αρνητικός αριθμός τότε $\alpha \dots 0$
- Αν $\alpha > \beta$ τότε $\alpha - \beta \dots 0$
- Αν $\alpha - \beta < 0$ τότε $\alpha \dots \beta$
- Αν $\alpha - \beta > 0$ τότε $\alpha \dots \beta$

- Αν $\alpha < \beta$ τότε $\alpha - \beta \dots 0$

β) Να τοποθετήσετε στο κενό (...) το κατάλληλο σύμβολο, ($>$, $<$, $=$) και στην παρένθεση στο τέλος κάθε πρότασης την κατάλληλη λέξη, (θετικός ή αρνητικός) :

- Το τετράγωνο ενός μη μηδενικού αριθμού είναι αριθμός 0 (.....)
- Ο κύβος ενός αρνητικού αριθμού είναι αριθμός 0 (.....)
- Ο κύβος ενός θετικού αριθμού είναι αριθμός 0 (.....)
- Δύο ομόσημοι αριθμοί έχουν πάντα γινόμενο αριθμό 0 (.....)
- Δύο ετερόσημοι αριθμοί έχουν πάντα γινόμενο αριθμό ... 0 (.....)
- Η άρτια δύναμη ενός μη μηδενικού αριθμού είναι πάντα αριθμός 0 (.....)
- Η περιττή δύναμη ενός αρνητικού αριθμού είναι πάντα αριθμός 0 (.....)
- Η περιττή δύναμη ενός θετικού αριθμού είναι πάντα αριθμός 0 (.....)
- Το πηλίκο δύο ετερόσημων αριθμών είναι αριθμός 0 (.....)
- Το πηλίκο δύο ομόσημων αριθμών είναι αριθμός 0 (.....)
- Το άθροισμα δύο θετικών αριθμών είναι αριθμός ... 0 (.....)
- Το άθροισμα δύο αρνητικών αριθμών είναι αριθμός 0 (.....)

4.

Έστω α το ύψος του Αλέξανδρου β το ύψος της Κλεοπάτρας και γ το ύψος του Πλάτωνα. Γνωρίζουμε ότι ο Αλέξανδρος είναι ψηλότερος από την Κλεοπάτρα και η Κλεοπάτρα είναι ψηλότερη από τον Πλάτωνα.

α) Μπορούμε να συμπεράνουμε τη σχέση ύψους του Αλέξανδρου και του Πλάτωνα; Ποιος είναι πιο ψηλός;

β) Να συμπληρώσετε την παρακάτω σχέση: $\alpha \dots \beta$ και $\beta \dots \gamma$ τότε (: Μεταβατική ιδιότητα στη διάταξη)

5.

Έστω α η ηλικία της Ηώς, β η ηλικία του Θαλή και γ η ηλικία του Ηρακλή.

Γνωρίζουμε ότι η Ηώ είναι μικρότερη του Θαλή και ο Θαλής μικρότερος του Ηρακλή.

α) Μπορούμε να συμπεράνουμε τη σχέση ηλικίας της Ηώς και του Ηρακλή; Ποιος είναι πιο μικρός;

β) Να συμπληρώσετε την παρακάτω σχέση: $\alpha \dots \beta$ και $\beta \dots \gamma$ τότε (: Μεταβατική ιδιότητα στη διάταξη)

6.

Έστω α , β , γ , δ τέσσερις θετικοί πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους γνωρίζουμε ότι:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha < \beta \\ \gamma < \delta \end{array} \right\} \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array}$$

α) Πολλαπλασιάστε στα δύο μέλη της ανισότητας (1) τον αριθμό γ . Η ανισότητα που προκύπτει έχει την ίδια φορά, γιατί;

Πολλαπλασιάστε στα δύο μέλη της ανισότητας (2) τον αριθμό β . Η ανισότητα που προκύπτει έχει την ίδια φορά, γιατί;

Εφαρμόστε την μεταβατική ιδιότητα στις δύο ανισότητες που προέκυψαν. Ποια ανισότητα προκύπτει;

β) Μπορούμε να πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη ανισότητες; Με ποιες προϋποθέσεις μπορούμε να το κάνουμε;

7.

Έστω α , β δύο ομόσημοι αριθμοί με $\alpha < \beta$.

α) Διαιρέστε και τα δύο μέλη της ανισότητας $\alpha < \beta$ με το γινόμενο $\alpha\beta$. Η ανισότητα που προκύπτει έχει την ίδια φορά, γιατί;

β) Συγκρίνεται τους αριθμούς $\frac{1}{a}$ και $\frac{1}{b}$

γ) Αν γνωρίζουμε την διάταξη δύο αριθμών μπορούμε να συγκρίνουμε πάντα τους αντίστροφους τους; Τι επιπλέον χρειάζεται να γνωρίζουμε;

8.

Έστω x ένας αριθμός ο οποίος παίρνει τιμές μεταξύ του 1 και του 2.

α) Ο αντίθετος του x μεταξύ ποιών αριθμών θα παίρνει τιμές;

β) Συμπληρώστε τη σχέση: $1 < x < 2$ τότε $\dots < -x < \dots$

γ) Ο τριπλάσιος του x μεταξύ ποιών αριθμών θα παίρνει τιμές;

δ) Συμπληρώστε τη σχέση: $1 < x < 2$ τότε $\dots < 3x < \dots$

9.

Έστω x ένας αριθμός ο οποίος παίρνει τιμές μεταξύ του -1 και του 1, δηλαδή $-1 < x < 1$

Τοποθετήστε με την σωστή σειρά τις παρακάτω προτάσεις ,συμπληρωμένες με την βοήθεια των οποίων θα βρούμε μεταξύ ποιων αριθμών παίρνει τιμές η παράσταση $-2x + 3$.

- Προσθέτουμε στα μέλη της ανισότητας τον αριθμό 3 και έτσι προκύπτει η ανισότητα:
.....
- Πολλαπλασιάζουμε στα μέλη της ανισότητας τον αριθμό -2 και έτσι προκύπτει ανισότητα με φορά:
- Έχουμε την ανισότητα
- Γράφουμε την ανισότητα από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο:
- Η παράσταση $-2x + 3$ παίρνει τιμές μεταξύ των αριθμών και

10.

Έστω x ένας αριθμός ο οποίος παίρνει τιμές μεταξύ του -1 και του 3, δηλαδή $-1 < x < 3$ και ψ

ένας αριθμός ο οποίος παίρνει τιμές μεταξύ του -5 και του -3 , δηλαδή $-5 < \psi < -3$.

Τοποθετήστε με την σωστή σειρά τις παρακάτω προτάσεις ,συμπληρωμένες με την βοήθεια των οποίων θα βρούμε μεταξύ ποιων αριθμών παίρνει τιμές η παράσταση $-2x + \psi - 5$.

- Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισότητες και και έτσι προκύπτει η ανισότητα
- Προσθέτουμε στα μέλη της ανισότητας τον αριθμό -5 και έτσι προκύπτει η ανισότητα:
.....
- Πολλαπλασιάζουμε στα μέλη της ανισότητας τον αριθμό -2 και έτσι προκύπτει ανισότητα με φορά:
- Έχουμε την ανισότητα
- Γράφουμε την ανισότητα από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο:
- Η παράσταση $-2x + \psi - 5$ παίρνει τιμές μεταξύ των αριθμών και

11.

Έστω x ένας αριθμός ο οποίος παίρνει τιμές μεταξύ του 2,5 και του 4, δηλαδή $2,5 < x < 4$ και ψ

ένας αριθμός ο οποίος παίρνει τιμές μεταξύ του 0 και του 1,5 , δηλαδή $0 < \psi < 1,5$.

Να υπολογίσετε μεταξύ ποιών αριθμών παίρνουν τιμές οι παρακάτω παραστάσεις:

α) $x + 6,1$

β) $x + \psi$

γ) $x - \psi$

δ) $2x - 3\psi + 4$

ε) $\frac{1}{x}$

12.

α) Δείξτε, με τη βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας ότι : $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

β) Έστω a, b δύο θετικοί αριθμοί με $a < b$.

- Ο αριθμός $a^2 - b^2$ είναι θετικός ή αρνητικός και γιατί;
- Συγκρίνετε τον a^2 με τον b^2 .

γ) Έστω a, b δύο αρνητικοί αριθμοί με $a < b$.

- Ο αριθμός $a^2 - b^2$ είναι θετικός ή αρνητικός και γιατί;
- Συγκρίνετε τον a^2 με τον b^2 .

δ) Έστω a, b δύο αριθμοί με $a < b$. Είναι σωστό ή λάθος ότι $a^2 < b^2$;

13.

Έστω a, b δύο αριθμοί με $a < b$.

α) Να εξετάσετε αν η διαφορά $(2a - 3b) - (a - 2b)$ είναι αριθμός θετικός ή αρνητικός;

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $2a - 3b$ και $a - 2b$.

14.

Έστω a, b δύο αριθμοί με $a < 0 < b$.

Να δικαιολογήσετε ότι το γινόμενο $(a - 1)(b - a)(b + 2)(a - b)$ είναι θετικός αριθμός.

15.

Έστω a, b δύο αντίθετοι αριθμοί.

Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της πρώτης στήλης του παρακάτω πίνακα με ένα μόνο στοιχείο της δεύτερης στήλης του συμπληρώνοντας τον δεύτερο πίνακα.

Στήλη 1 ^η	Στήλη 2 ^η
A.: Το γινόμενο των a, b	α. 0
B.: Το πηλίκο των a, b	β. ένας αρνητικός αριθμός
Γ.: Το άθροισμα των a, b	γ. ένας θετικός αριθμός
	δ. 1
	ε. -1

A	B	Γ

16.

Στις παρακάτω προτάσεις να επιλέξετε την σωστή απάντηση:

- Αν $-2x > 0$ τότε : A.: $x < 0$, B.: $x = 0$, Γ.: $x > 0$, Δ.: $x > 2$.
- Αν $3x < 0$ τότε : A.: $x < 0$, B.: $x = 0$, Γ.: $x > 0$, Δ.: $x > -3$.
- Αν $x(x^2 + 1) > 0$ τότε : A.: $x < 0$, B.: $x = 0$, Γ.: $x > 0$, Δ.: $x > -1$.
- Αν $(x - 1)^2 \leq 0$ τότε : A.: $x < 1$, B.: $x = 1$, Γ.: $x > 1$, Δ.: $x \geq 1$.

17.

Για τον αριθμό x ισχύει: $(x + 1)(x - 1) \leq 0$.

α) Ποιος από τους αριθμούς $x - 1$, $x + 1$ είναι μεγαλύτερος;

β) Τι αριθμοί πρέπει να είναι οι $x - 1$, $x + 1$; Ομόσημοι ή ετερόσημοι;

γ) Συμπληρώστε τις ανισώσεις: $x - 1 \dots 0$ και $x + 1 \dots 0$

δ) Συμπληρώστε την ανίσωση: $\dots \leq x \leq \dots$

ε) Συμπληρώστε την πρόταση: Ο αριθμός x πρέπει να παίρνει τιμές από $\dots$ μέχρι και $\dots$

18.

Για τον αριθμό x ισχύει: $(x - 1)(x - 3) > 0$. Να δικαιολογήσετε ότι ο αριθμός x παίρνει τιμές μεγαλύτερες του 3 ή μικρότερες του 1.

19.

Αν x, ψ δύο ετερόσημοι αριθμοί να βρείτε αν ο αριθμός $x(x - \psi)\psi(\psi - x)$ είναι θετικός ή αρνητικός. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

20.

α) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $(3a - 5) - (a + 1)$

β) Αν $a < 3$ να συγκρίνετε τους αριθμούς $3a - 5$ και $a + 1$.

21.

Αν $a < b$ και b αρνητικός αριθμός να διατάξετε από τον μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους

αριθμούς: 0 , $a - b$, $\frac{a}{b}$, 1

22.

Να λυθεί η ανίσωση: $\alpha x < -\alpha$ όταν

α) Ο αριθμός a είναι αρνητικός.

β) Ο αριθμός a είναι θετικός.

23.

α) Αν $a < 0$ και $\frac{a}{b} > 0$ τότε: Α.: $b < 0$, Β.: $b = 0$, Γ.: $b > 0$, Δ.: δεν μπορούμε να γνωρίζουμε αν

ο b είναι θετικός ή αρνητικός. Επιλέξτε την σωστή απάντηση.

β) Να λυθεί η ανίσωση $\frac{-2}{-2x+6} > 0$

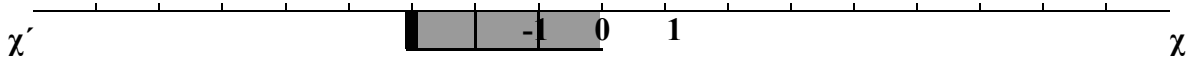
24.

Να γράψετε στο τέλος της κάθε πρότασης «Σωστό», αν αυτή είναι σωστή και «Λάθος», αν αυτή είναι λάθος:

- Η ανίσωση $0x > 1$ αληθεύει για όλους τους πραγματικούς αριθμούς
- Η ανίσωση $0x \geq -1$ αληθεύει για όλους τους πραγματικούς αριθμούς
- Η ανίσωση $0x < 1$ είναι αδύνατη
- Η ανίσωση $0x > 0$ είναι αδύνατη
- Η ανίσωση $0x \geq 1$ αληθεύει για όλους τους πραγματικούς αριθμούς
- Για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύει: $(x - 2)^2 > 0$

- Αν $0 < \chi < 4$ τότε $\chi = 1$ ή $\chi = 2$ ή $\chi = 3$
- Μπορούμε να γράφουμε $0 < \chi < -1$
- Η ανίσωση $3\chi \geq 0$ αληθεύει για όλους τους μη αρνητικούς αριθμούς
- Η ανίσωση $\frac{1}{\chi} > 0$ αληθεύει μόνο για τους αριθμούς χ με $\chi > 1$

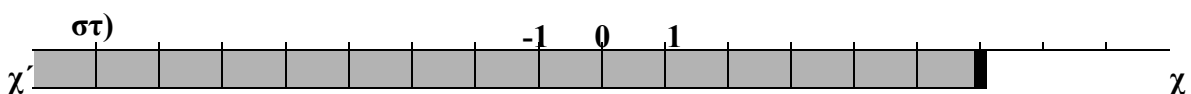
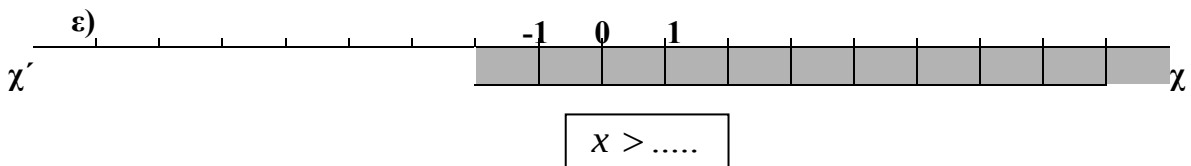
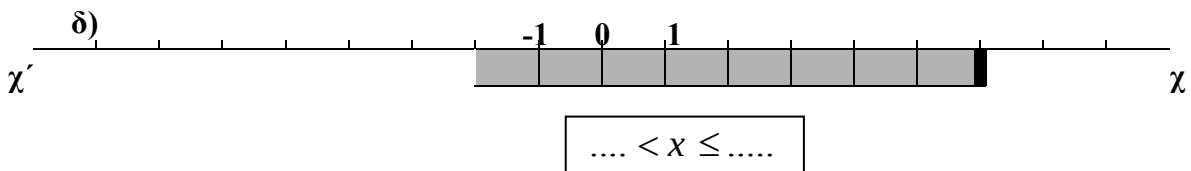
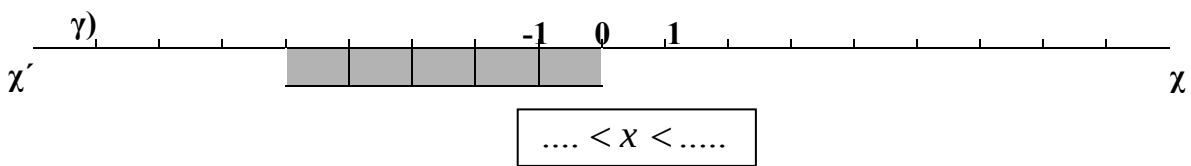
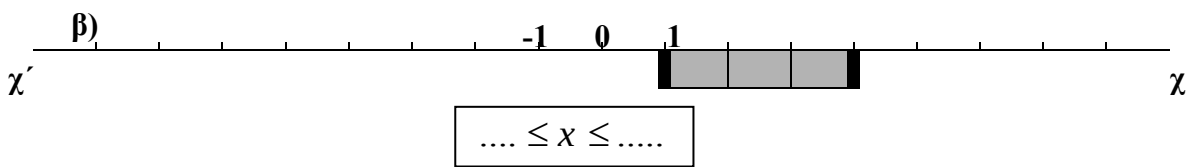
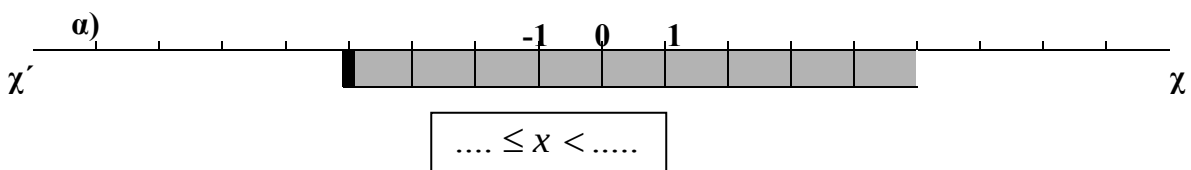
25.



Στον παραπάνω άξονα έχουμε σημειώσει τους αριθμούς χ για τους οποίους ισχύει :

$$-3 \leq \chi < 0$$

Να βρείτε ποιους αριθμούς έχουμε σημειώσει στους επόμενους άξονες.



$$x \leq \dots$$

26.

α) Να σημειώσετε πάνω σε άξονα τους αριθμούς x για τους οποίους ισχύει:

$$-1,5 \leq x \leq 0$$

β) Να σημειώσετε πάνω σε άξονα τους αριθμούς x για τους οποίους ισχύει:

$$\frac{-5}{3} < x \leq \frac{1}{3}$$

γ) Να σημειώσετε πάνω σε άξονα τους αριθμούς x για τους οποίους ισχύει:

$$0 \leq -x < \frac{11}{2}$$

δ) Να σημειώσετε πάνω σε άξονα τους αριθμούς x για τους οποίους ισχύει:

$$-\frac{2}{5} < x < 1$$

ε) Να σημειώσετε πάνω σε άξονα τους αριθμούς x για τους οποίους ισχύει:

$$x \leq \frac{3}{2}$$

στ) Να σημειώσετε πάνω σε άξονα τους αριθμούς x για τους οποίους ισχύει:

$$x > -\frac{3}{5}$$

ζ) Να σημειώσετε πάνω σε άξονα τους αριθμούς x για τους οποίους ισχύει:

$$x > 2 \quad \text{ή} \quad x < -2$$

27.

Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις και να σημειώσετε τις λύσεις τους πάνω σε άξονα.

α) $-x + \frac{3x-2}{2} - \frac{2}{7} \leq 1 - \frac{5-2x}{14}$

β) $x - 3 + \frac{x-3}{5} \geq -\frac{1-(-x+4)}{3} + \frac{10-8x}{15}$

$$\gamma) 8 \geq \frac{x}{2} - 1 + 2x - \frac{3-5x}{4}$$

$$\delta) -3 + 2\left(-\frac{3x}{2} + 1\right) - 5\left(1 - \frac{-2+2x}{5}\right) + 2x > 0$$

28.

Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων και να τις σημειώσετε πάνω σε άξονα.:

$$\alpha) -5x + 7(x-2) < 3(x-5) + 1 \quad \text{και} \quad \frac{1}{2}(x-4) - x \geq 2(x-1)$$

$$\beta) x - 4(1,25 - 0,5x) \leq 0 \quad \text{και} \quad 2 - \frac{x}{2} + \frac{3-x}{3} > -2$$

$$\gamma) \frac{3-2x}{7} < \frac{x-1}{-4} \quad \text{και} \quad \frac{\frac{4x}{3}-1}{2} + 1 \geq \frac{\frac{2x-1}{2}+3}{3} - 2$$

$$\delta) 0 < \frac{x}{2} - 1 + x - \frac{7-x}{6} \quad \text{και} \quad 1 < \frac{x}{-2} + \frac{1-x}{3} - 5$$

29.

Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

$$\alpha) (x-2)(x+2) < 0$$

$$\beta) x^2 - 4x > 0$$

$$\gamma) x^3 + x \leq 0$$

30.

α) Υπάρχουν άπειροι θετικοί αριθμοί που το τετράγωνό τους είναι μικρότερο από τον εαυτό τους. Μπορείτε να βρείτε κάποιον.

β) Βρείτε όλους τους αριθμούς που ικανοποιούν τις προϋποθέσεις του α) και σημειώστε τους πάνω σε έναν άξονα.

31.

Η απόλυτη τιμή του αριθμού $2x - 1$ δεν ξεπερνάει το 1.

α) Σημειώστε πάνω σε έναν άξονα την περιοχή που μπορεί να βρίσκεται ο αριθμός $2x - 1$.

β) Βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει η μεταβλητή x .