

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο
ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ
2.1 ΜΟΝΩΝΥΜΑ.

1.

Να γράψετε τις αλγεβρικές παραστάσεις που προκύπτουν από τις παρακάτω προτάσεις, συμπληρώνοντας τον πίνακα που ακολουθεί :

- i. Η περίμετρος ενός ορθογωνίου με διαστάσεις α και 3
- ii. Το εμβαδό ενός ορθογωνίου με διαστάσεις α και 3
- iii. Η απόσταση που διανύει ένα αυτοκίνητο με ταχύτητα υ (Km/h) σε χρόνο 3 h
- iv. Το μήκος ενός ορθογωνίου με εμβαδό $10 \text{ (cm}^2\text{)}$, αν το πλάτος του είναι χ .
- v. Το τετράγωνο της υποτεινουσας ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες πλευρές χ και 4.
- vi. Η επιφάνεια ενός κύβου με ακμή α .
- vii. Η επιφάνεια ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις α , β , γ .
- viii. Η περίμετρος ενός κύκλου ακτίνας ρ .
- ix. Το εμβαδό ενός κύκλου ακτίνας ρ .
- x. Το τριπλάσιο ενός αριθμού χ αυξημένο κατά τον κύβο του.

A/A	Παράσταση	Είδος παράστασης (μονώνυμο – πολυώνυμο)
i.		
ii.		
iii.		
iv.		
v.		
vi.		
vii.		
viii.		
ix.		
x.		

2.

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Μονώνυμο	Συντελεστής	Κύριο μέρος
$-2\alpha^3\beta$		
$\frac{\alpha^2\beta\gamma^3}{2}$		
$\frac{1}{3}\beta\alpha^3$		
$(\sqrt{2}-1)\chi\psi^2$		
$-\alpha^2\gamma^3\beta$		
$\chi\psi^2$		

Υπάρχουν τρεις ομάδες όμοιων μονωνύμων. Ποιες είναι αυτές; Να βρείτε το άθροισμα των μονωνύμων της κάθε ομάδας. Να γράψετε το πολυώνυμο που προκύπτει από το άθροισμα όλων των μονωνύμων.

3.

Δίνεται η αλγεβρική παράσταση: $A = -5\chi\psi + \chi^2 - 2\psi^2$

α) Από ποια μονώνυμα αποτελείται η παράσταση;

β) Είναι σωστό ή λάθος ότι αυτή η παράσταση είναι ένα πολυώνυμο;

γ) Υπολογίστε την αριθμητική τιμή της παράστασης για $\chi = -1$ και $\psi = 2$

4.

Δίνονται τα μονώνυμα -4χ και χ^3 .

α) Είναι σωστό ή λάθος ότι τα μονώνυμα είναι όμοια;

β) Ποιο είναι το άθροισμά τους; Είναι μονώνυμο ή πολυώνυμο;

γ) Υπάρχει τιμή της μεταβλητής χ για την οποία η αριθμητική τιμή του πολυωνύμου να είναι ίση με 0; Αν ναι ποια είναι αυτή;

5.

Καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις μπορεί να είναι **σωστή**, μπορεί όμως να είναι **λάθος**.

Γράψτε δίπλα από κάθε πρόταση το **Σ** αν αυτή είναι σωστή και το **Λ** αν αυτή είναι λάθος.

- Η αλγεβρική παράσταση $\frac{2}{x}$ είναι ένα μονώνυμο με συντελεστή 2.
- Η αλγεβρική παράσταση $\frac{x}{2}$ είναι ένα μονώνυμο με συντελεστή $\frac{1}{2}$
- Το μονώνυμο $\chi^3\psi$ δεν έχει συντελεστή.
- Τα άθροισμα των μονωνύμων $2\chi^3\psi$ και $\chi^3\psi$ είναι το μονώνυμο $3\chi^3\psi$
- Ο αριθμός 2004 μπορεί να χαρακτηριστεί μονώνυμο.
- Η παράσταση $(\sqrt{2} + \sqrt{3})x$ δεν είναι μονώνυμο.
- Το κύριο μέρος του μονωνύμου $-4a^3b^2$ είναι το αβ.
- Η παράσταση $2\chi + 7\chi - \chi$ δεν είναι μονώνυμο.
- Το γινόμενο δύο μονωνύμων είναι πάντα μονώνυμο.
- Το πηλίκο δύο μονωνύμων είναι πάντα μονώνυμο.
- Το άθροισμα δύο μονωνύμων με το ίδιο κύριο μέρος είναι πάντα μονώνυμο.
- Το άθροισμα δύο μονωνύμων είναι πάντα μονώνυμο.
- Η δύναμη ενός μονωνύμου με εκθέτη θετικό ακέραιο είναι ένα μονώνυμο.

6.

Σε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις επιλέξτε την σωστή απάντηση.

- Η αριθμητική τιμή του πολυωνύμου $1 + 2\chi + \chi^2$ για $\chi = -1$ είναι:

A.: 4 B.: 2 Γ.: 0 Δ.: δεν μπορεί να υπολογιστεί.

- Η αριθμητική τιμή της παράστασης $\frac{\chi^3 + 5\chi}{\chi + 3}$ για $\chi = -3$ είναι:

A.: 0 B.: -39 Γ.: $-\frac{39}{6}$ Δ.: δεν μπορεί να υπολογιστεί.

- Το τετράγωνο του μονωνύμου $-3\chi\psi^3$ είναι:

A.: $-3\chi^2\psi^6$ B.: $9\chi\psi^3$ Γ.: $9\chi^2\psi^6$ Δ.: $-9\chi^2\psi^6$.

- Το γινόμενο των μονωνύμων $\sqrt{2}\chi$ και $\sqrt{8}\chi$ είναι ίσο με:

A.: $4\chi^2$ B.: 4χ Γ.: 4 Δ.: $8\chi^2$.

7.

Να κάνετε τις πράξεις, (άθροισμα ομοίων μονωνύμων):

i. $5\chi + 3\chi - 2\chi - \chi$

ii. $-\chi^2 + \chi^2$

iii. $2a\chi^3 - 0,5a\chi^3 + 1,25a\chi^3$

iv. $-\chi^3\psi + \frac{1}{3}\chi^3\psi + \frac{8}{12}\chi^3\psi$

v. $-\frac{\alpha^3}{2} + \frac{\alpha^3}{6} - \frac{\alpha^3}{3} + 2\alpha^3$

vi. $\frac{\chi}{\sqrt{2}} - \frac{\chi}{\sqrt{8}} - \frac{\sqrt{2}\chi}{4} + \chi$

8.

Να κάνετε τις πράξεις, (γινόμενο μονωνύμων):

- i. $-5\chi \cdot 3\chi$
- ii. $0,5\chi^3\psi \cdot (-2\chi\psi^3) \cdot \chi$
- iii. $-2\omega\phi \cdot \frac{1}{2}\omega \cdot (-3\phi) \cdot \frac{1}{3}\omega$
- iv. $(-5x^3a^4)^2$
- v. $\left(-\frac{2}{3}x\right)^3 \cdot x \cdot \left(-\frac{3}{2}x\right)^2 \cdot 1,5x$
- vi. $t^3c \cdot (-5) \cdot (tc)^3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$

9.

Να κάνετε τις πράξεις, (διαίρεση μονωνύμων):

- i. $-5\chi : 4\chi$
- ii. $4a\chi^3 : (-2a\chi)$
- iii. $-5\psi : (3\psi^3\chi)$
- iv. $\frac{xt^3}{3} : \frac{x^3t}{6}$
- v. $\beta : (-\beta^2)$
- vi. $\left(-\frac{2xc}{3}\right) : \left(-\frac{4}{9}x\right)$

10.

Να κάνετε τις πράξεις:

- i. $(2\chi \cdot 3\chi - \chi^2)^2 : \chi^3 - \chi$
- ii. $2\alpha^3\beta\gamma^2 : (\sqrt{2}\alpha\beta\gamma) - \sqrt{2}\alpha \cdot (3\alpha^2 : \alpha - 2\alpha)\gamma$
- iii. $\chi \cdot (\psi - 3\psi) : (-2) + 3\psi(\chi - 2\chi) - (\chi\psi)^3 : (\chi^2\psi^2)$
- iv. $\left(\frac{1}{5}\omega^3 : (0,2\omega^2)\right)^3 : (-2\omega)^2 + 5\omega - (-(-3\omega))$

2.2 ΑΝΑΓΩΓΗ ΟΜΟΙΩΝ ΟΡΩΝ.

1.

Να κάνετε τις πράξεις (: Αναγωγή ομοίων όρων)

- i. $3\alpha - 5\beta + 2\alpha - \beta$
- ii. $\chi\sqrt{2} + \chi - 2 + 3\chi - 1$
- iii. $\frac{1}{5}\chi^2\psi - \chi\psi + \chi\psi^2 - \frac{2}{3}\chi^2\psi - \frac{1}{2}\chi\psi^2 + \chi\psi + 1$
- iv. $-\frac{\kappa}{2} - \frac{\lambda}{3} + 2\kappa - \lambda + \frac{\kappa}{3}$
- v. $\chi^2 - \chi\psi - \psi\chi + \psi^2 - \chi^2$
- vi. $2 - 3\chi + \chi^2 + 5\chi - 3 + 7\chi^2$
- vii. $\alpha^3 - \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - 2\alpha^2\beta + 2\alpha\beta^2 - \beta^3$
- viii. $-(2\alpha - \beta) + (3\alpha - 4\beta) - \alpha - (1 - 3\beta) + 2$
- ix. $1 + \chi + \chi^2 - (1 - \chi + \chi^2) - 2\chi$
- x. $(1 + \alpha) + (2 + \alpha) + (3 + \alpha) + \dots + (100 + \alpha)$

2.

Δίνεται η παράσταση $A = 3\chi^2\psi - 2\psi^3 - 2\chi^2\psi + \psi^3$

α) Να κάνετε την αναγωγή ομοίων όρων.

β) Αν $\psi = \frac{\chi}{3}$ δείξτε ότι: $A - \left(\frac{2}{3}\chi\right)^3 = 0$

3.

Θέτοντας τον αριθμό 11111 με την μεταβλητή χ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$3 \cdot 555555 - 333333 - 5 \cdot 222222 - 2002.$$

4.

Αν $\chi a = 2$ δείξτε ότι η τιμή της παράστασης: $A = a\chi^3 + a^3\chi + a^2\chi^2 - 2\chi^2 - 2a^2 + 2000$ είναι ίση με 2004.

5.

Υπολογίστε την τιμή της παράστασης:

$$(1 + a) - (2 + 2a) + (3 + 3a) - (4 + 4a) + \dots + (4003 + 4003a) - (4004 + 4004a)$$

6.

Αν το άθροισμα των α και β είναι ίσο με 5, να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

$$A = -(2\alpha + \beta + 3 - \gamma) - [-\alpha - (2\beta - \gamma) - 1] + 3 + 2\alpha$$

$$B = \alpha - [2\alpha + 5 + \beta - (3\beta - \alpha)] + 3\alpha - \beta$$

7.

Ένας οπωροπώλης είχε χ κιλά μήλα και ψ κιλά πορτοκάλια.

Πούλησε την α' ημέρα την μισή ποσότητα των μήλων και το $\frac{1}{3}$ της ποσότητας των πορτοκαλιών.

Πούλησε την β' ημέρα τα $\frac{3}{4}$ της ποσότητας των μήλων και τα $\frac{3}{4}$ της ποσότητας των πορτοκαλιών που του έμειναν από την α' ημέρα.

α) Να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις κάνοντας όπου χρειάζεται τις πράξεις:

- Στην αρχή η συνολική ποσότητα των μήλων και των πορτοκαλιών είναι: $\dots + \dots$ κιλά.
- Στο τέλος της α' ημέρας η συνολική ποσότητα των μήλων και των πορτοκαλιών που έμειναν είναι: $\dots + \dots - \frac{\dots}{\dots}\chi - \frac{\dots}{\dots}\psi = \dots$ κιλά.
- Στο τέλος της β' ημέρας η συνολική ποσότητα των μήλων και των πορτοκαλιών που έμειναν είναι: $\dots + \dots - \frac{\dots}{\dots}\chi - \frac{\dots}{\dots}\psi = \dots$ κιλά.

β) Να υπολογίσετε την συνολική ποσότητα των μήλων και των πορτοκαλιών που έμειναν στο τέλος της β' ημέρας αν η αρχική ποσότητα των μήλων είναι 16 κιλά και η αρχική ποσότητα των πορτοκαλιών είναι 24 κιλά.

8.

Έστω $\alpha = -2\chi + \psi + \omega$, $\beta = \chi - 2\psi + \omega$, $\gamma = \chi + \psi - 2\omega$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\alpha + \beta + \gamma$

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $(2\alpha - \beta) + (2\beta - \gamma) + (2\gamma - \alpha)$.

γ) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $(\alpha + 2\chi) - (\beta + 2\psi) + (\gamma + 2\omega) - 2\psi$.

9.

Αν α, β, γ πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε: $\alpha + \beta + \gamma = 20$ και $3\alpha + 2\beta + 3\gamma = 67$, να προσδιορίσετε την τιμή της παράστασης $A = (2\alpha + \beta + 2\gamma)(4\alpha + 3\beta + 4\gamma)$ (Ε.Μ.Ε. 1998)

10.

$$\text{Έστω } \alpha = \frac{3}{81^x \cdot 27^y}, \beta = \frac{3^x \cdot 9^y}{27}, \gamma = 9 \cdot 9^x.$$

$$\text{Να δείξετε ότι } \alpha\beta\gamma = \frac{1}{3^x \cdot 3^y}$$

11.

Αν $\alpha + \beta = -3$, $\beta + \gamma = 2$ και $\gamma + \alpha = 1$ να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

$$A = \beta - (\alpha - \gamma) - (2\alpha - \beta) + 4\alpha$$

$$B = \alpha - [\beta - (\alpha - \beta) - (\beta - \gamma)] + 2\beta + 2\gamma$$

$$\Gamma = 2\beta + \gamma - \{-\alpha - [-\beta - (-\gamma)]\}$$

$$\Delta = 2\alpha + 2\beta + 2\gamma$$

2.3 ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ.

1.

Να συμπληρώσετε την επιμεριστική ιδιότητα:

- $\alpha(\beta + \gamma) = \dots + \dots$
- $\alpha(\beta - \gamma) = \dots - \dots$
- $(\alpha + \beta)(\gamma + \delta) = \dots + \dots + \dots + \dots$

2.

Να κάνετε τις πράξεις:

$$\alpha) -2(\chi - \psi)$$

$$\beta) 3(-\chi + 2)$$

$$\gamma) -\frac{3}{2}(-2\chi + 6\psi)$$

$$\delta) 0,7(2\alpha + 3\beta)$$

$$\epsilon) -\alpha(\beta - \alpha + 2)$$

$$\sigma\tau) \chi(\chi^2 - 3 + \chi)$$

$$\zeta) -\psi(\chi\psi - \psi + 6)$$

$$\eta) \chi\psi(\chi - \psi)$$

$$\theta) \alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma)$$

$$\iota) -3\chi(\chi^3 - 2\chi + 5)$$

3.

Να κάνετε τις πράξεις:

$$\alpha) -2\chi(\chi - \psi) + 2\psi(\psi - \chi) - 2(\psi^2 - \chi^2)$$

$$\beta) 3\alpha(3 - 2\alpha) - 6(2 - \alpha^2) - 9(\alpha + 1) + 20$$

$$\gamma) -\chi^2(\chi - 2) + \chi(\chi^2 - 1) + \chi(2\chi + 1)$$

$$\delta) \alpha(\alpha - \beta + 1) - \beta(\beta - \alpha - 1) - \alpha(\alpha + 1) - \beta(\beta + 1)$$

$$\epsilon) \alpha\chi(\alpha - \chi) - \alpha(1 - \chi^2) + \chi(1 - \alpha^2) - (\chi - \alpha)$$

4.

Να κάνετε τις πράξεις:

$$\alpha) (\chi + 2)(\chi + 3) - \chi(\chi + 5) - 5$$

$$\beta) (\chi - 1)(\chi + 4) + 6 - \chi(\chi + 3)$$

$$\gamma) (\chi - 4)(\chi - 5) + \chi(9 - \chi) - 17$$

$$\delta) (2\chi + 3)(2\chi - 3) - 4(\chi^2 - \frac{13}{4})$$

5.

Να κάνετε τις πράξεις:

$$\alpha) (\alpha - 2\beta)(\alpha + \beta) - (\alpha + \beta)(\alpha - \beta) + \beta(\beta + \alpha)$$

$$\beta) -\alpha(3\alpha - 2\beta - 5) + (3\alpha + \beta)(\alpha - \beta) + \beta^2 - 5(\alpha - 1)$$

$$\gamma) (2\kappa - 3\lambda)(4\kappa^2 + 6\kappa\lambda + 9\lambda^2) - 8\kappa^3 + 27\lambda^3 + 10$$

$$\delta) (3\mu - 2\nu)(3\nu - 2\mu) - 6(\mu + \nu)(\mu + \nu) - \nu\mu + 15$$

6.

Να κάνετε τις πράξεις:

$$\alpha) (\chi - 1)(\chi - 2)(\chi + 1)(\chi + 2) - \chi^2(\chi^2 - 5) + 6.$$

$$\beta) (\chi^2 - 4\chi + 4)(\chi - 2) - \chi^3 + 108 + 6\chi(\chi - 2)$$

$$\gamma) (\chi + 10)(\chi^2 + 20\chi + 100) - \chi^2(\chi + 30) - 300\chi$$

$$\delta) (\chi + 1)(\chi^4 - \chi^3 + \chi^2 - \chi + 1) - \chi^5 + 10001$$

7.

Αν $\alpha^4 = 10$ και $\beta^4 = 9$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$(\alpha - \beta)(\alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta^3)$$

8.

Αν α, β, γ είναι τρεις διαδοχικοί περιττοί ακέραιοι αριθμοί να δείξετε ότι το τετράγωνο του β είναι κατά 4 μονάδες μεγαλύτερο από το γινόμενο των α, γ .

Ισχύει το ίδιο για τους άρτιους αριθμούς;

9.

Να υπολογίσετε την διαφορά του γινομένου δύο διαδοχικών περιττών ακεραίων από το γινόμενο του άρτιου, που προηγείται του μικρότερου περιττού, και του άρτιου που έπεται του μεγαλύτερου περιττού.

10.

Αν για τους αριθμούς χ, ψ ισχύει ότι: $\chi^3 - \psi^3 = 3\chi\psi(\chi - \psi)$ να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης:

$$A = (\chi - \psi)(\chi^2 - 2\chi\psi + \psi^2)$$
 είναι ίση με 0.

11.

Αν $\chi^2 + 5\chi = \psi$ και $\psi^2 + 10\psi = -24$ να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης

$$A = (\chi + 1)(\chi + 2)(\chi + 3)(\chi + 4)$$
 είναι ίση με το 0.

2.4 ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ.

1.

Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες ώστε να προκύψουν ταυτότητες:

- i. $(\dots - \dots)^{\dots} = \chi^2 - \dots + \psi^2$
- ii. $(\dots - \dots)^{\dots} = \chi^3 - \dots + \dots - \psi^3$
- iii. $(\dots + \dots)^{\dots} = \chi^2 + \dots + \psi^2$
- iv. $(\dots + \dots)^{\dots} = \chi^3 + \dots + \dots + \psi^3$
- v. $(\chi - \psi)(\dots + \dots) = \dots - \dots$
- vi. $\chi^3 - \psi^3 = (\dots - \dots)(\dots + \dots + \dots)$
- vii. $\chi^3 + \psi^3 = (\dots + \dots)(\dots - \dots + \dots)$

2.

Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της 1^{ης} στήλης του παρακάτω πίνακα με ένα μόνο στοιχείο της 2^{ης} στήλης του συμπληρώνοντας τον 2^ο πίνακα.

1 ^η Στήλη	2 ^η Στήλη
A.: $\kappa^2 - \lambda^2$	1.: $(\kappa - \lambda)^3$
B.: $\kappa^2 - 2\kappa\lambda + \lambda^2$	2.: $(\kappa + \lambda)^2$
Γ.: $\kappa^2 + 2\kappa\lambda + \lambda^2$	3.: $(\kappa - \lambda)^2$
Δ.: $\kappa^3 - \lambda^3$	4.: $(\kappa - \lambda)(\kappa + \lambda)$
	5.: $(\kappa - \lambda)(\kappa^2 + \kappa\lambda + \lambda^2)$
	6.: $(\kappa + \lambda)(\kappa^2 - \kappa\lambda + \lambda^2)$

A	B	Γ	Δ

3.

Καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις μπορεί να είναι **σωστή**, μπορεί όμως να είναι **λάθος**.

Γράψτε δίπλα από κάθε πρόταση **Σωστό** αν αυτή είναι σωστή και **Λάθος** αν αυτή είναι λάθος.

- I. Ταυτότητα ονομάζεται μια ισότητα που περιέχει μεταβλητές και επαληθεύεται για κάποιες τιμές αυτών των μεταβλητών.
- II. Ταυτότητα ονομάζεται μια ισότητα που περιέχει μεταβλητές και επαληθεύεται για όλες τις τιμές αυτών των μεταβλητών.
- III. Η ισότητα $\chi^2 + \psi^2 - 2\chi\psi = (\chi - \psi)^2$ δεν είναι ταυτότητα.
- IV. Αν $\alpha + \beta = 5$ τότε $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = 25$
- V. Αν $\alpha^2 + \beta^2 = 10$ και $\alpha\beta = 3$ τότε $\alpha + \beta = 4$
- VI. Ισχύει: $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$
- VII. Ισχύει: $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2 + 2\alpha\beta$
- VIII. Ισχύει: $\chi^3 + \psi^3 + 3\chi\psi(\chi + \psi) = (\chi + \psi)^3$
- IX. Ισχύει: $\chi^3 - \psi^3 - 3\chi\psi(\chi - \psi) = (\chi - \psi)^3$
- X. Ισχύει: $(-\chi - 2)^2 = -\chi^2 - 4\chi - 4$
- XI. Ισχύει: $(-\alpha - \beta)(\alpha - \beta) = \beta^2 - \alpha^2$

4.

Να αποδείξετε τις παρακάτω ταυτότητες:

- α) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$
- β) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2 + 2\alpha\beta$
- γ) $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$
- δ) $(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - \beta^3 - 3\alpha\beta(\alpha - \beta)$

5.

Να βρείτε τα αναπτύγματα:

- i. $(\chi + 3)^2$
- ii. $(\chi - 4)^2$
- iii. $(2\chi + 5)^2$
- iv. $(1 - 3\chi)^2$
- v. $(2\chi + 5\psi)^2$

- vi. $(3\kappa - 2\lambda)^2$
- vii. $(\chi^2 + 1)^2$
- viii. $(\chi^3 - 2)^2$
- ix. $\left(\frac{x^5}{5} + \frac{\psi^3}{3}\right)^2$
- x. $\left(\frac{2}{3}\chi - \frac{3}{4}\psi\right)^2$

6.

Να βρείτε τα αναπτύγματα:

- i. $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2$
- ii. $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2$
- iii. $(-\chi + 5)^2$
- iv. $(-1 - \chi)^2$
- v. $(-2\chi - 5\psi)^2$

- vi. $\left(\frac{3}{x} - \frac{x}{3}\right)^2$
- vii. $(\chi^{1002} - 1)^2$
- viii. $(\chi^\kappa - \psi^\lambda)^2$
- ix. $\left(\frac{\chi}{\psi} + \frac{\psi}{\chi}\right)^2$
- x. $(2^a - 2^\beta)^2$

7.

Να κάνετε τις πράξεις χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$:

- i. $(\chi + 3)(\chi - 3)$
- ii. $(\chi - 1)(\chi + 1)$
- iii. $(2\chi - 5)(2\chi + 5)$
- iv. $(1 - 3\chi)(1 + 3\chi)$
- v. $(2\chi + 5\psi)(2\chi - 5\psi)$

- vi. $(3\kappa - 2\lambda)(3\kappa + 2\lambda)$
- vii. $(\chi^2 + 1)(\chi^2 - 1)$
- viii. $(\chi^3 - 2)(\chi^3 + 2)$
- ix. $\left(\frac{x^5}{5} + \frac{\psi^3}{3}\right)\left(\frac{x^5}{5} - \frac{\psi^3}{3}\right)$
- x. $\left(\frac{2}{3}\chi - \frac{3}{4}\psi\right)\left(\frac{2}{3}\chi + \frac{3}{4}\psi\right)$

8.

Να βρείτε τα αναπτύγματα:

- i. $(\alpha + 1)^3$
- ii. $(\chi + 2)^3$
- iii. $(2\alpha + 3)^3$
- iv. $(1 + 3\alpha)^3$
- v. $(\alpha + 5\beta)^3$

- vi. $(3\kappa - 2\lambda)^3$
- vii. $(\chi^2 - 1)^3$
- viii. $(\chi^3 - 2)^3$
- ix. $\left(x - \frac{1}{x}\right)^3$
- x. $\left(-\chi - \frac{1}{x}\right)^3$

9.

Δίνονται οι παραστάσεις: $A = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$ $B = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$

α) Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων **A , B**

β) Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης $\Gamma = A \cdot B$ είναι ίση με 1

10.

Δίνονται οι παραστάσεις: $A = (\sqrt{2} + 1)^3$ $B = (\sqrt{2} - 1)^3$

α) Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων **A , B**

β) Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης $\Gamma = A \cdot B$ είναι ίση με 1

11.

Αν για τον πραγματικό αριθμό χ ισχύει $\chi^3 = 5$, να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων:

$$A = (\chi - 1)(\chi^2 + \chi + 1)$$

$$B = (\chi + 1)(\chi^2 - \chi + 1)$$

$$\Gamma = (2\chi - 1)(4\chi^2 + 2\chi + 1)$$

$$\Delta = (2\chi + 3)(4\chi^2 - 6\chi + 9)$$

12.

Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:

i. $\chi^2 - \dots + 1 = (\dots - \dots)^2$

ii. $4\alpha^2 + \dots + 9 = (\dots + \dots)^2$

iii. $\chi^4 - \dots + \alpha^2 = (\dots - \dots)^2$

iv. $100 + \dots + \alpha^{10} = (\dots + \dots)^2$

v. $25\psi^2 - \dots + 16\chi^2 = (\dots - \dots)^2$

vi. $\frac{9}{4}x^2 + \dots + \frac{1}{9} = (\dots + \dots)^2$

vii. $16\alpha^{16} - \dots + 36\beta^{36} = (\dots - \dots)^2$

viii. $\chi^6 + \dots + \frac{1}{4} = (\dots + \dots)^2$

ix. $\chi^{2\nu} - \dots + \psi^{2\mu} = (\dots - \dots)^2$

x. $2\chi^2 + \dots + 2 = (\dots + \dots)^2$

13.

Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:

i. $\chi^2 - 4\chi + \dots = (\dots - \dots)^2$

ii. $9\alpha^2 + 6\alpha + \dots = (\dots + \dots)^2$

iii. $25 - 20\alpha + \dots = (\dots - \dots)^2$

iv. $\alpha^2 + 2 + \dots = (\dots + \dots)^2$

v. $49\kappa^4 - 14\kappa^2 + \dots = (\dots - \dots)^2$

vi. $1 + 10\chi + \dots = (\dots + \dots)^2$

vii. $64\chi^2\psi^6 - 80\chi\omega 2\psi^3 + \dots = (\dots - \dots)^2$

viii. $\alpha^2 + 5\alpha + \dots = (\dots + \dots)^2$

ix. $\chi^{4004} - 2 + \dots = (\dots - \dots)^2$

x. $\chi^2\psi^2 + 2\chi + \dots = (\dots + \dots)^2$

14.

Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:

- i. $8x^3 - \dots + \dots - 27 = (\dots - \dots)^3$
- ii. $1 + \dots + \dots + \chi^3 \psi^3 = (\dots + \dots)^3$
- iii. $64a^6 - \dots + \dots - \beta^9 = (\dots - \dots)^3$
- iv. $\chi^3 + \dots + \dots + \frac{1}{\chi^3} = (\dots + \dots)^3$
- v. $\kappa^6 \lambda^6 - \dots + \dots - 8 = (\dots - \dots)^3$

15.

Να αποδείξετε ότι:

- i. $(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = (\alpha - \beta)^2$
- ii. $(\alpha - \beta)^2 + 4\alpha\beta = (\alpha + \beta)^2$
- iii. $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$
- iv. $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)^3 + 3\alpha\beta(\alpha - \beta)$
- v. $2\alpha^2 + 2\beta^2 + 2\gamma^2 - 2\alpha\beta - 2\beta\gamma - 2\alpha\gamma = (\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2$

16.

Με τη βοήθεια της ταυτότητας $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$ να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

$$A = 200^2 - 190^2 =$$

$$B = 111^2 - 11^2 =$$

$$\Gamma = 47^2 - 43^2 =$$

$$\Delta = 7,55^2 - 2,45^2 =$$

17.

Με τη βοήθεια των ταυτοτήτων $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2$, $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2$ να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

$$A = 99^2 + 198 + 1 =$$

$$B = 1001^2 - 2002 + 1 =$$

$$\Gamma = (\alpha - 1)^2 - 2(\alpha^2 - 1) + (\alpha + 1)^2 =$$

$$\Delta = (3 - \chi)^2 + (3 + \chi)^2 - 2(\chi^2 - 9) =$$

18.

$$\text{Έστω } a = \sqrt{5} - \sqrt{3} \text{ και } \beta = \sqrt{5} + \sqrt{3}$$

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα και το γινόμενο των a , β .

β) Με τη βοήθεια της ταυτότητας $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$, να υπολογίσετε το άθροισμα τετραγώνων των a , β .

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα των κύβων των a , β .

19.

α) Να αποδείξετε ότι $(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = 4\alpha\beta$.

β) Αν για τους αριθμούς a , β γνωρίζουμε ότι: $a + \beta = \sqrt{5}$ και $a - \beta = \sqrt{3}$ να δείξετε ότι

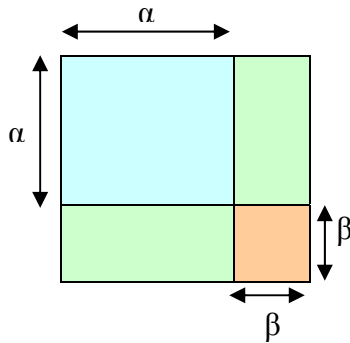
$\alpha\beta = \frac{1}{2}$ και να υπολογίσετε το άθροισμα τετραγώνων των a , β .

20.

- α) Να δείξετε ότι $(\sqrt{\kappa} + \sqrt{\lambda})^2 = \kappa + \lambda + 2\sqrt{\kappa\lambda}$
 β) Να βρείτε δύο θετικούς ακέραιους αριθμούς κ, λ ώστε $\kappa\lambda = 3$ και $\kappa + \lambda = 4$
 γ) Να κάνετε την παράσταση $4 + 2\sqrt{3}$ τέλειο τετράγωνο.
 δ) Ποια είναι η τετραγωνική ρίζα του $4 + 2\sqrt{3}$

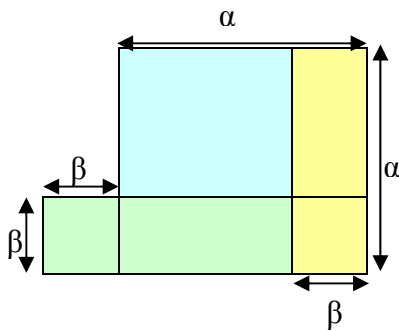
21.

Με την βοήθεια των εμβαδών στο παρακάτω σχήμα να δείξετε την ταυτότητα $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$.



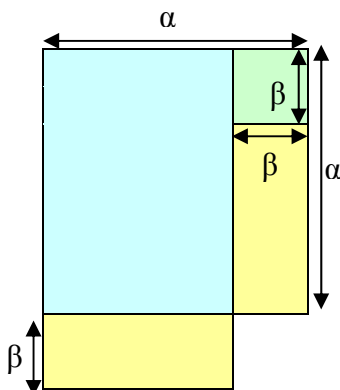
22.

Με την βοήθεια των εμβαδών στο παρακάτω σχήμα να δείξετε την ταυτότητα $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$.



23.

Με την βοήθεια των εμβαδών στο παρακάτω σχήμα να δείξετε την ταυτότητα $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$.



24.

Το άθροισμα δύο αντίστροφων αριθμών είναι $2\sqrt{2}$.

Να υπολογιστούν

- α) Το άθροισμα των τετραγώνων τους.
- β) Το άθροισμα των κύβων τους
- γ) Το τετράγωνο της διαφοράς τους
- δ) Τη διαφορά τους.

25.

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + \dots + 99^2 + 100^2 - 2 \cdot (1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \dots + 99 \cdot 100)$$

26.

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$4 + 11^2 + 101^2 + 1001^2 + 10001^2 + 100001^2 - (9^2 + 99^2 + 999^2 + 9999^2 + 99999^2)$$

27.

Αν $\alpha + \beta = \chi - \psi = 2$, να δείξετε ότι οι τιμές των παρακάτω παραστάσεων Α, Β είναι ίσες με 4.

$$A = (\alpha^3 + \beta^3) - (\alpha^2 + \beta^2) + 4\alpha\beta.$$

$$B = (\chi^3 - \psi^3) - (\chi^2 + \psi^2) - 4\chi\psi$$

28.

Αν $\alpha^8 = \beta^8 + 2002$, να υπολογίσετε την τιμή του γινομένου:

$$(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^4 + \beta^4)$$

29.

α) Να αποδείξετε την ταυτότητα $(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\alpha\gamma$.

β) Αν $\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma = \alpha + \beta + \gamma$, να δείξετε ότι η παράσταση

$$A = (\alpha + 1)^2 + (\beta + 1)^2 + (\gamma + 1)^2 - 3 \text{ είναι τέλειο τετράγωνο.}$$

30.

α) Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(\chi^2 + \psi^2 + \omega^2) = (\alpha\chi + \beta\psi + \gamma\omega)^2 + (\alpha\psi - \beta\chi)^2 + (\alpha\omega - \gamma\chi)^2 + (\beta\omega - \gamma\psi)^2.$$

β) Να γράψετε τους αριθμούς 14 και 141 ως άθροισμα τετραγώνων 3 θετικών ακεραίων.

γ) Να γράψετε το γινόμενο $14 \cdot 141$ ως άθροισμα τετραγώνων 4 θετικών ακεραίων

2.5 ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

1.

Στα παρακάτω πολυώνυμα να βγάλετε κοινό παράγοντα τον ΜΚΔ των συντελεστών των όρων τους.

- | | |
|-----------------------------|--------------------------------|
| i. $6\chi + 3$ | vi. $3x^2 - 9x + 12$ |
| ii. $2a^5 - 10$ | vii. $14 + 49\beta + 70\alpha$ |
| iii. $24\kappa - 16\lambda$ | viii. $4\rho - 6\rho^3 + 8$ |
| iv. $15 + 20\mu$ | ix. $26\mu^2 - 39\nu$ |
| v. $220\omega^2 + 33t^3$ | x. $25z - 75t + 100$ |

2.

Να κάνετε παραγοντοποίηση τα παρακάτω πολυώνυμα .

- | | |
|--|---|
| i. $6a\chi + 3a$ | vi. $3x^2 - 9x + 12x^3$ |
| ii. $2a^5 - 10a$ | vii. $14a^2 + 49a\beta + 70a\beta^3$ |
| iii. $24\kappa^2\lambda - 16\kappa\lambda^2$ | viii. $4\nu\rho - 6\nu^2\rho^3 + 8\rho^2\nu$ |
| iv. $15\mu^2 + 20\mu$ | ix. $26\mu^2 - 39\mu$ |
| v. $220\omega^2 + 33\omega^3$ | x. $25z^2 - 75z$ |
| | xi. $a^2 - a$ |
| | xii. $a^3 - a^2 - a$ |
| | xiii. $\chi^{2004} - \chi^{2003} - \chi^{2002}$ |

3.

Να κάνετε παραγοντοποίηση τις παρακάτω παραστάσεις, αφού πρώτα κάνετε τις πράξεις.

- | | |
|--|--|
| i. $2\chi(2\chi^2 - 4) + \chi^3 - 2\chi$ | vi. $(2\chi + 1)^2 - \chi(\chi - 2) - 1$ |
| ii. $(a + 1)(a - 1) - (a - 1)(a^2 + a + 1)$ | vii. $(2a + 3\beta)(2a - 3\beta) - 4a(a - 3\beta)$ |
| iii. $(\chi + \psi)^3 - \chi^3 - \psi^3$ | viii. $(a + \beta)^2 - a(a - \beta)$ |
| iv. $\chi^2(\chi + 6) - \chi^3 - 8\chi$ | ix. $(a - \beta)^2 - \beta(a + \beta)$ |
| v. $(a + \beta)^3 - a(a - \beta)^2 - \beta(\beta - a)^2$ | x. $(a + \beta)^2 - (\beta + \gamma)^2 - (a - \gamma)(a + \gamma)$ |

4.

Να κάνετε παραγοντοποίηση τις παρακάτω παραστάσεις:

- | | |
|---|--|
| i. $\chi(\chi + 3) + 2(\chi + 3)$ | vi. $(2\psi + 2)(\psi - 6) - (3\psi + 3)(2 - \psi)$ |
| ii. $\chi^3(\chi + 1) - \chi(\chi + 1)$ | vii. $(a - \beta)^3 + (a - \beta)$ |
| iii. $\alpha(\chi + \psi) + \beta(\chi + \psi)$ | viii. $\chi(\chi - a)^2(\chi + 2a) - \chi^2(\chi - a)(\chi + 2a)^2$ |
| iv. $\chi(a - \beta) + \psi(\beta - a)$ | ix. $a^2(a - \beta)\beta^3 + a(a - \beta)^2\beta$ |
| v. $(\chi - 1)(\chi - 2) - (1 - \chi)(2\chi + 1)$ | x. $(\chi + \psi + 1) + (\chi + \psi + 1)\chi + (\chi + \psi + 1)\psi$ |

5.

Να κάνετε παραγοντοποίηση τις παρακάτω παραστάσεις : «Ομαδοποίηση»

- | | |
|--|---|
| i. $2a + 4a\beta + 6\beta + 3$ | vi. $\chi^2 - \chi - \psi\chi + \psi + \omega - \omega\chi$ |
| ii. $a\beta - \beta\gamma + \chi a - \chi\gamma$ | vii. $\chi^5 - 4\chi^4 + 3\chi^3 - 12\chi^2 - \chi + 4$ |
| iii. $a^3\beta^2\gamma + a^2\beta\gamma + 2a\beta + 2$ | viii. $a^3 + a^2 + (a + 1)(a + 2)$ |
| iv. $4\chi^2\psi + 10\chi - 6\chi\psi^2 - 15\psi$ | ix. $a\beta + \beta\gamma + a\gamma + \gamma^2 + (\beta + \gamma)(a + \beta)$ |
| v. $a\beta + \beta\chi + a + \gamma a$ | x. $\chi^2 + (a + \beta)\chi + a\beta$ |

$$+\gamma\chi + \chi$$

6.

Να κάνετε παραγοντοποίηση τις παρακάτω παραστάσεις :

(Χρησιμοποιήστε τις ταυτότητες: $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$, $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$ και $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$)

- | | |
|---------------------------|--|
| i. $\alpha^2\beta^2 - 4$ | vi. $27\alpha^3 - 1000$ |
| ii. $16\chi^4 - 81\psi^2$ | vii. $216\chi^6 + \psi^3$ |
| iii. $1 - 8\chi^3$ | viii. $(\alpha + \beta)^2 - 1$ |
| iv. $64 + 125\alpha^3$ | ix. $49\chi^2\psi^4 - 64$ |
| v. $36\omega^2 - 10^4$ | x. $\frac{\chi^2}{4} - \frac{\psi^2}{9}$ |
| | xi. $0,001\chi^3 - 0,064\psi^3$ |
| | xii. $\frac{\alpha^3\beta^9}{27} + 1$ |

7.

Να κάνετε παραγοντοποίηση τις παρακάτω παραστάσεις :

- i. $\chi^2 - (\chi + 3\psi)^2$
- ii. $(\alpha + \beta)^2 - (\beta + \gamma)^2$
- iii. $(\chi + 2)^3 - (\psi + 2)^3$
- iv. $(\chi + 1)^3 + 1$
- v. $(5\chi + 3\psi)^2 - (3\chi + 5\psi)^2$

8.

Να κάνετε παραγοντοποίηση τις παρακάτω παραστάσεις :

- | | |
|----------------------------------|---------------------------------------|
| i. $\alpha\chi^2 - \alpha\psi^2$ | vi. $75\alpha\beta^3 - 27\alpha\beta$ |
| ii. $\chi\alpha^3 - \chi\beta^3$ | vii. $\alpha\chi^4 - \alpha^4\chi$ |
| iii. $\chi^6 - \psi^6$ | viii. $24\chi^3 + 81\psi^3$ |
| iv. $2\kappa^3 + 16\lambda^3$ | ix. $\alpha^6 - \alpha^3$ |
| v. $32v^4 - 8\mu^2$ | x. $2\chi^4 - 18\chi^2$ |

9.

Να κάνετε παραγοντοποίηση τις παρακάτω παραστάσεις :

- | | |
|--|---|
| i. $\alpha(\chi - \psi) + \chi^2 - \psi^2$ | vi. $\chi^3 + \chi^2 + 5\chi + 125$ |
| ii. $(\alpha - \beta)^2 + \alpha^2 - \beta^2$ | vii. $4\chi^4 + 8\chi^6 + \psi^3 - \psi^2$ |
| iii. $\chi^4 - \chi^2 + \chi + 1$ | viii. $\kappa^3 - 2\kappa^2 + -27\lambda^3 + 18\lambda^2$ |
| iv. $\alpha\beta - \beta^2 + \alpha^3 - \beta^3$ | |
| v. $\chi^5 - 8\chi^2 + \chi^4 - 16$ | |

10.

Να κάνετε παραγοντοποίηση τις παρακάτω παραστάσεις : (Τέλεια τετράγωνα)

- | | |
|----------------------------------|--|
| i. $\chi^2 + 2\chi + 1$ | vi. $5\chi^4 - 100\chi^2 + 500$ |
| ii. $4\alpha^2 - 4\alpha + 1$ | vii. $(\alpha + \beta)^2 + 2(\alpha\beta + \beta^2) + \beta^2$ |
| iii. $25\kappa^2 + 20\kappa + 4$ | viii. $(\chi + \psi + 1)^2 - 2(\chi + \psi + 1) + 1$ |

$$\text{iv. } \chi^2 - \chi + \frac{1}{4}$$

$$\text{v. } 18 + 12\chi + 2\chi^2$$

$$\text{ix. } \frac{1}{4}\chi^{10} + \chi^5 + 1$$

$$\text{x. } \alpha^3 - 4\alpha^2 + 4\alpha$$

11.

Να κάνετε παραγοντοποίηση τις παρακάτω παραστάσεις : (Τέλεια τετράγωνα, διαφορά τετραγώνων)

$$\text{i. } \chi^2 + 2\chi + 1 - 9\psi^2$$

$$\text{ii. } 25\alpha^2 - \chi^2 + 4\chi\psi - 4\psi^2$$

$$\text{iii. } 49\chi^2 + 64\psi^2 - 112\chi\psi - \psi^4$$

$$\text{iv. } \gamma^2 - \alpha^2 - 2\alpha\beta - \beta^2$$

$$\text{v. } \chi^2 + 6\chi\psi + 9\psi^2 - (9\chi^2 - 6\chi\psi + \psi^2)$$

12.

Παραγοντοποίηση τριωνύμων: Γράφουμε τον δεύτερο όρο του τριωνύμου σε άθροισμα δύο μονωνύμων τέτοιων ώστε, το γινόμενο των συντελεστών τους να ισούται με το γινόμενο των συντελεστών του πρώτου και τρίτου όρου των τριωνύμων.

Κατόπιν παραγοντοποιούμε... «ανά δύο».

Παράδειγμα στο τριώνυμο $3\chi^2 - 5\chi\psi - 2\psi^2$,

θα γράψουμε το $-5\chi\psi$: $-6\chi\psi + 1\chi\psi$, εφ' όσον $-6 \cdot 1 = 3 \cdot (-2)$.

Έτσι έχουμε: $3\chi^2 - 5\chi\psi - 2\psi^2 = 3\chi^2 - 6\chi\psi + 1\chi\psi - 2\psi^2 = 3\chi(\chi - 2\psi) + \psi(\chi - 2\psi) = (\chi - 2\psi)(3\chi + \psi)$

Να κάνετε παραγοντοποίηση τα παρακάτω τριώνυμα ,

$$\text{i. } 2\alpha^2 - 7\alpha\beta + 3\beta^2$$

$$\text{ii. } 6\chi^2 - 5\chi - 1$$

$$\text{iii. } 1\chi^2 + \chi - 2$$

$$\text{iv. } \chi^2 - \chi - 2$$

$$\text{v. } \chi^3 - 3\chi + 2$$

$$\text{vi. } \chi^2 - 10\chi + 16$$

$$\text{vii. } -5\chi^2 + 2\chi + 3$$

$$\text{viii. } 4\chi^4 - 5\chi^2 + 1$$

$$\text{ix. } \chi^2 + 3\chi\psi - 4\psi^2$$

$$\text{x. } 2\chi^2 - \chi - 1$$

$$\text{xi. } (\alpha + \beta)^2 - 5(\alpha + \beta) + 6$$

$$\text{xii. } \alpha^6 + 7\alpha^3 - 8$$

$$\text{xiii. } 11\chi^2 - \chi - 10$$

$$\text{xiv. } \chi^2 + \chi - 110$$

$$\text{xv. } \chi^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})\chi + \sqrt{6}$$

$$\text{xvi. } 16(\chi^2 + 7\chi)^2 - 2(\chi^2 + 7\chi) - 3$$

$$\text{xvii. } 3(\chi^2 - 3)^2 - 7(\chi^2 - 3) + 2$$

$$\text{xviii. } (\alpha^2 + 2\alpha)^2 - 2(\alpha^2 + 2\alpha) - 3$$

$$\text{xix. } \chi^3 - 20\chi^2 + 64\chi$$

$$\text{xx. } 3 \cdot 2^{2v} + 2^{v+2} + 1$$

13.

Να κάνετε παραγοντοποίηση τις παρακάτω παραστάσεις : (Χρησιμοποιήστε τις ταυτότητες: $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$ ή $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2 + 2\alpha\beta$ και την διαφορά τετραγώνων).

$$\text{i. } \alpha^4 + \beta^4 - 7\alpha^2\beta^2$$

$$\text{ii. } \alpha^4 + \beta^4 - 11\alpha^2\beta^2$$

$$\text{iii. } \chi^4 + 1 - 3\chi^2$$

$$\text{iv. } \chi^8 + 4\psi^8$$

$$\text{v. } \chi^4 + 4$$

14.

α) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση: $\psi^2 + 10\psi + 21$.

β) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση: $(\chi^2 + 5\chi + 4)(\chi^2 + 5\chi + 6) - 3$.

γ) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση: $(\chi + 1)(\chi + 2)(\chi + 3)(\chi + 4) - 3$.

15.

Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

- i. $(\chi - 1)(\chi - 2)(\chi - 3)(\chi - 4) + 1$
- ii. $(\chi - 1)(\chi - 2)(\chi - 3)(\chi - 4) + 1 - \chi^4$

16.

Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση:

$$\alpha\beta(\beta - \alpha) + \beta\gamma(\gamma - \beta) + \gamma\alpha(\alpha - \gamma)$$

17.

α) Να δείξετε ότι $\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 + 2\alpha^2\beta^2 - 2\beta^2\gamma^2 - 2\beta^2\gamma^2$ είναι τέλειο τετράγωνο.

β) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση: $(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)^2 - 4\alpha^2\beta^2$.

γ) Να αποδείξετε την ταυτότητα του De Moivre:

$$\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 + 2\alpha^2\beta^2 - 2\beta^2\gamma^2 - 2\beta^2\gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha - \beta + \gamma)(\alpha + \beta - \gamma)(\alpha - \beta - \gamma)$$

18.

Αν $\alpha + \beta + \gamma = 0$ τότε:

α) Να δείξετε ότι η παράσταση $\alpha^2 - \beta^2 - 2\beta\gamma$ είναι τέλειο τετράγωνο.

β) Να κάνετε γινόμενο την παράσταση $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$ (Απ.: = $3\alpha\beta\gamma$)

γ) Να κάνετε γινόμενο την παράσταση $(\chi - \psi)^3 + (\psi - \omega)^3 + (\omega - \chi)^3$.

19.

Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$A = x^2 - 25y^2 \quad B = 12x^2 - 3$$

$$\Gamma = 3(\alpha - \beta) - (\alpha^2 - \beta^2) \quad \Delta = \alpha\beta - 3\alpha + 2\beta^2 - 6\beta$$

$$E = 21 + 4\alpha - \alpha^2 \quad Z = \alpha\chi - 2\alpha\psi + 2\beta\psi - \beta\chi$$

$$H = 2\alpha\beta + 4\alpha - \beta - 2 \quad \Theta = \alpha^3 + 1$$

$$I = 2\beta^2 - \beta + 2\beta\alpha - \alpha \quad K = 4x^2(y^2 - 1) + 4y^2(1 - x^2)$$

$$\Lambda = x^4 - x^8 \quad M = x^2y^2 + xy - y^3 - x^2y$$

$$N = (x + y)^2 - w^2 + x + y + w \quad \Xi = x^2 - (\alpha - \beta)x - \alpha\beta$$

$$O = x^2 + 3xy + 2y^2 + xz + yz \quad \Pi = x^3 + x^2 - 2$$

$$P = 6x^2 + 5xy + y^2 \quad \Sigma = 64x^4 + y^4$$

$$T = x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y) \quad Y = x(y^2 - z^2) + y(z^2 - x^2) + z(x^2 - y^2)$$

$$\Phi = x^8 - 12x^4 + 16 \quad X = (x - xy)^2 + (x - xy)^4 - (1 - y)^4$$

$$\Psi = x^7 - x^5 - x^3 + x \quad \Omega = 4x^4 + 3x^2y^2 + y^4$$

20.

α) Να δείξετε την ταυτότητα του Euler :

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha)$$

β) Με την βοήθεια της παραπάνω ταυτότητας να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

- i. $\alpha^3 - \beta^3 + \gamma^3 + 3\alpha\beta\gamma$
- ii. $\alpha^3 - \beta^3 - \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma$
- iii. $\chi^3 + \psi^3 - 8 + 6\psi\chi$
- iv. $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha)$

2.6 ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

1.

Καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις μπορεί να είναι **σωστή**, μπορεί όμως να είναι **λάθος**.

Γράψτε δίπλα από κάθε πρόταση **Σωστό** αν αυτή είναι σωστή και **Λάθος** αν αυτή είναι λάθος.

- I. Η παράσταση $\frac{2\chi}{(\chi-1)\chi}$ ορίζεται για $\chi = 0$ εφ' όσον αυτή μπορεί να πάρει τη μορφή $\frac{2}{\chi-1}$.
- II. Η παράσταση $\frac{2\chi-4}{\chi-1}$ δεν ορίζεται για $\chi = 2$
- III. Η παράσταση $\frac{\chi+3}{(\chi-1)(\chi+3)(\chi-3)}$ δεν ορίζεται για $\chi = 1$ και για $\chi = 3$ και για $\chi = -3$
- IV. Η παράσταση $\frac{1}{1-\frac{1}{\chi}}$ ορίζεται για όλους τους αριθμούς εκτός του 0
.....
- V. Η τιμή της παράστασης $\frac{\alpha\chi - \chi^2}{\alpha - 1}$ για $\chi = 1$ και οποιοδήποτε α είναι ίση με το 0
- VI. Η παράσταση $\frac{3\alpha + \beta}{(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) - \alpha^2 + \beta^2}$ δεν έχει νόημα για καμιά τιμή των α, β
 $\frac{1}{\chi-5}$
- VII. Ισχύει $\frac{\chi-5}{1} = \frac{\chi-6}{\chi-5}$ για οποιαδήποτε τιμή του χ εκτός του 5.
 $\chi-6$
- VIII. Ισχύει $\frac{\alpha + \beta}{\alpha} = 1 + \beta$, εφ' όσον $\alpha \neq 0$
- IX. Ισχύει $\frac{\alpha + \beta}{\alpha} = \beta$, εφ' όσον $\alpha \neq 0$
- X. Ισχύει $\frac{\alpha + \beta}{\alpha} = 1 + \frac{\beta}{\alpha}$, εφ' όσον $\alpha \neq 0$
- XI. Ισχύει $\frac{\alpha\beta}{\alpha} = \beta$, εφ' όσον $\alpha \neq 0$
- XII. Η πράξη $\frac{\chi}{\chi-1} : \frac{\chi-2}{\chi-1}$ έχει νόημα για οποιαδήποτε τιμή του χ εκτός του 1
.....

- XIII. Όταν χ, ψ είναι αντίθετοι η παράσταση $\frac{2\chi + 4\psi}{\chi^2 - \psi^2}$ δεν ορίζεται.
- XIV. Η πράξη $\alpha:(\alpha - 1)$ μας δίνει την κλασματική παράσταση $\frac{\alpha}{\alpha - 1}$, εφ' όσον $\alpha \neq 1$
- XV. Η πράξη $\chi:\chi^2$ μας δίνει την κλασματική παράσταση $\frac{1}{\chi}$, εφ' όσον $\chi \neq 0$.
.....
- XVI. Για να απλοποιήσουμε μια κλασματική παράσταση, για τις τιμές των μεταβλητών που ορίζεται, πρέπει να κάνουμε γινόμενο τον αριθμητή και τον παρονομαστή της.

2.

Να βρείτε τις τιμές της μεταβλητής χ για τις οποίες δεν ορίζεται η πράξη της διαίρεσης της παράστασης $\frac{\chi^2 - 5\chi}{\chi - 3}$ με την παράσταση $\frac{2\chi - 8}{\chi(\chi - 9)}$

3.

Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

- | | |
|---|---|
| i. $\frac{a}{a^2}$ | vi. $\frac{14\alpha}{7(\alpha + 1)}$ |
| ii. $\frac{ax^3}{xa^3}$ | vii. $\frac{9x(c - 9)}{36(9 - c)x^3}$ |
| iii. $\frac{6(t + 1)}{2(t + 1)^2}$ | viii. $\frac{3 \cdot 2^{v+1}(v + 1)}{6 \cdot 2^v v}$ |
| iv. $\frac{\alpha\beta^2\gamma^3}{\alpha^2\beta\gamma^2}$ | ix. $\frac{(x - 1)(x + 1)}{x^2 - 1}$ |
| v. $\frac{8(\chi + 1)(\chi - 2)^2}{24(\chi - 2)(\chi + 1)^2}$ | x. $\frac{\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2}{(\alpha + \beta)^2}$ |

4.

Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις: (Να κάνετε πρώτα γινόμενο τον αριθμητή και τον παρονομαστή τους)

- | | |
|--|--|
| i. $\frac{2a - 8}{a^2 - 4a}$ | vi. $\frac{4x^2 - 4x + 1}{1 - 4x^2}$ |
| ii. $\frac{x^2 - 1}{x^2 - x}$ | vii. $\frac{15\alpha^2 - 6\alpha\beta}{25\alpha^3 - 4\alpha\beta^2}$ |
| iii. $\frac{\alpha\beta - \alpha\gamma}{\gamma^2 - \beta^2}$ | viii. $\frac{\chi^5 - \chi}{\chi^3 - \chi^2}$ |

$$\text{iv. } \frac{\chi^2\psi + \chi\psi^2}{\chi^3\psi - \chi\psi^3}$$

$$\text{v. } \frac{2\chi + 4}{\chi^2 + 4\chi + 4}$$

$$\text{ix. } \frac{2\alpha^3 - 2\beta^3}{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2}$$

$$\text{x. } \frac{2\chi^3 + 16}{2\chi^2 - 8}$$

5.

Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις: (Να κάνετε πρώτα γινόμενο τον αριθμητή και τον παρονομαστή τους)

$$\text{i. } \frac{2\chi + 3\psi\chi + 6\psi + 4}{3\psi\chi + 3\psi + 2\chi + 2}$$

$$\text{ii. } \frac{\alpha\beta + \alpha - 4\beta - 4}{\alpha\beta - 4\beta - \alpha + 4}$$

$$\text{iii. } \frac{\chi\psi + \chi\beta - \alpha\psi - \alpha\beta}{\chi^2 - 2\alpha\chi + \alpha^2}$$

$$\text{iv. } \frac{x^2 + 2a + x + 2ax}{x^4 - x^2 - 4a^2x^2 + 4a^2}$$

$$\text{v. } \frac{\alpha^3 - \alpha^2\beta - \alpha\beta^2 + \beta^3}{\alpha^3 - 3\alpha\beta(\alpha - \beta) - \beta^3}$$

$$\text{vi. } \frac{\chi^3 + \chi - \chi^2 - 1}{\chi^4 - 1}$$

6.

Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις: (Να κάνετε πρώτα γινόμενο τον αριθμητή και τον παρονομαστή τους)

$$\text{i. } \frac{3\alpha^2 + 5\alpha\beta + 2\beta^2}{9\alpha^2 + 12\alpha\beta + 4\beta^2}$$

$$\text{ii. } \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 27}$$

$$\text{iii. } \frac{\chi^6 - \psi^6}{(\chi^2 + \psi^2)^2 - \chi^2\psi^2}$$

$$\text{iv. } \frac{\chi^2 - 2\chi + 1}{\chi^3 - 3\chi + 2}$$

$$\text{v. } \frac{5\chi^2 + 5\chi + 1}{5\chi^3 - 4\chi - 1}$$

$$\text{vi. } \frac{\chi^4 + 4}{\chi^3 + \chi^2 - 2}$$

7.

Να κάνετε τους πολλαπλασιασμούς:

$$\text{i. } \alpha \cdot \frac{1}{\alpha^2}$$

$$\text{ii. } \frac{2}{\alpha\beta} \cdot \frac{\alpha}{4\beta} \cdot \frac{3\beta^2}{\alpha}$$

$$\text{iii. } \frac{4}{\chi^3} \cdot \frac{\chi^2}{2\psi} \cdot \frac{\chi}{\psi}$$

$$\text{iv. } \frac{1}{-5\alpha} \cdot \left(-\frac{3\alpha^2}{10}\right) \cdot \left(-\frac{25}{\alpha\chi}\right)$$

$$\text{v. } \left(-\frac{9\alpha}{\chi\psi\omega}\right) \cdot \left(\frac{\chi}{\psi^2}\right) \cdot \left(-\frac{\psi}{3\alpha}\right)^2$$

$$\text{vi. } \frac{7}{(\chi-2)^2} \cdot \frac{\chi-2}{14\chi} \cdot (2-\chi)$$

8.

Να κάνετε τις διαιρέσεις:

$$\text{i. } \frac{\alpha}{2} : \frac{2}{\alpha}$$

$$\text{ii. } \left(-\frac{3\alpha^2}{\beta}\right) : \frac{9\alpha}{\beta}$$

$$\text{iii. } 1 : \frac{\alpha}{\beta}$$

$$\text{iv. } \frac{\alpha}{\beta} : \left(-\frac{\alpha}{\beta}\right)$$

$$\text{v. } \frac{\alpha}{\beta} : (-\alpha)$$

$$\text{vi. } \frac{\alpha^5}{\beta^5} : \left(-\frac{\alpha}{\beta}\right)^6$$

9.

Να κάνετε τους πολλαπλασιασμούς:

$$\begin{array}{ll} \text{i.} & \frac{(\alpha - \beta)^2}{\alpha^2 - \beta^2} \cdot \frac{(\alpha + \beta)}{\alpha - \beta} \\ \text{ii.} & \frac{\chi}{\chi - 1} \cdot \frac{\chi^2 - \chi}{\chi^3} \\ \text{iii.} & \frac{2\alpha - \beta}{\alpha - \beta} \cdot \frac{\alpha}{\beta - 2\alpha} \cdot \frac{(\beta - \alpha)^2}{\alpha^3} \\ \text{iv.} & (\alpha - 2\alpha^2) \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \left(-\frac{1}{\alpha - 2} \right)^2 \\ \text{v.} & \frac{\chi + \alpha}{\beta^2 - \chi^2} \cdot \frac{\chi + \beta}{\alpha^2 - \chi^2} \\ \text{vi.} & \frac{1}{\alpha^3 + \beta^3} \cdot \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha} \cdot \frac{\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2}{\alpha - \beta} \end{array}$$

10.

Να κάνετε τις διαιρέσεις:

$$\begin{array}{ll} \text{i.} & (16\chi\psi + 8\chi^2 - 4\psi) : 8\chi\psi \\ \text{ii.} & (\alpha - \beta) : (\alpha^2 - \beta^2) \\ \text{iii.} & (2\alpha + 3\beta) : (6\alpha^2 + 13\alpha\beta + 6\beta^2) \\ \text{iv.} & \frac{6}{\chi + \psi} : \frac{3\chi - 9\psi}{\chi^2 - 2\chi\psi - 3\psi^2} \\ \text{v.} & \frac{\chi^3}{\chi^3 - 1} : \frac{\chi^3 + \chi^2 + \chi}{3} \\ \text{vi.} & \frac{1 - 9\chi^2}{8\chi} : \frac{9\chi^2 - 6\chi + 1}{12\chi^2 - 4\chi} \end{array}$$

11.

Να κάνετε τις πράξεις:

$$\begin{array}{ll} \text{i.} & \frac{\frac{\chi - \omega}{\chi + \omega}}{(\chi - \omega)^2} \\ \text{ii.} & \frac{\frac{\chi - \omega}{\chi + \omega}}{(\chi + \omega)^2} \\ \text{iii.} & \frac{\frac{\alpha}{\alpha^2 + \alpha}}{\alpha^2 - 1} \\ \text{iv.} & \frac{\frac{\chi\psi - \chi\psi^3}{4 + 4\psi}}{\frac{\chi\psi - \chi^3\psi}{6 - 6\chi}} \\ \text{v.} & \frac{\frac{\chi - 1}{\chi - 1}}{\chi + 1} : \frac{\chi^2 + 2\chi + 1}{\chi^2 - 2\chi + 1} \end{array}$$

12.

Να δείξετε ότι ο αριθμός $\frac{333334 \cdot 666663 \cdot 333331 + 333327}{333333^2}$ είναι ακέραιος. Να βρεθεί αυτός ο ακέραιος. (Ε.Μ.Ε. 1998)

13.

Αν για τους αριθμούς $\alpha, \beta, \chi, \psi$ ισχύει: $\alpha - \chi = \psi - \beta$ και $\chi \neq \pm\psi$ να δείξετε ότι η παράσταση:

$$A = \frac{\alpha + \beta}{\chi^2 - \psi^2} : \frac{1}{\chi - \psi} \text{ είναι ίση με } 1.$$

14.

Αν για τους αριθμούς α, β, γ ισχύει $\alpha + \beta + \gamma = 0$, χωρίς κάποιος από αυτούς να είναι 0 να δείξετε:

α) Η παράσταση $\frac{\beta^2 + 2\beta\gamma - \alpha^2}{\alpha + \beta}$ είναι ίση με γ .

β) Η παράσταση $\frac{\beta^2 + 2\beta\gamma - \alpha^2}{\alpha + \beta} + \frac{\alpha^2 + 2\alpha\beta - \gamma^2}{\alpha + \gamma} + \frac{\gamma^2 + 2\gamma\alpha - \beta^2}{\gamma + \beta}$ είναι ίση με 0.

15.

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\frac{\chi^5 - \chi^3}{\chi^3 - \chi} \cdot \frac{1}{\chi}$ για $\chi = 2003$

2.7 ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΩΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

1.

Στις παρακάτω ερωτήσεις να επιλέξετε την σωστή απάντηση:

- i. Ποιο είναι τα Ε..ΚΠ. των $\alpha, \alpha^2, \alpha^3$;
Α.: Το α , Β.: Το α^2 , Γ.: Το α^3 , Δ.: Το α^6
- ii. Ποιο είναι τα Ε..ΚΠ. των $\alpha, \alpha + 2$;
Α.: Το α , Β.: Το $\alpha + 2$, Γ.: Το 2α , Δ.: Το $\alpha(\alpha + 2)$
- iii. Ποιο είναι τα Ε..ΚΠ. των $2\alpha, 3\alpha^2, 6\alpha^3$;
Α.: Το α^6 , Β.: Το $2\alpha^3$, Γ.: Το $6\alpha^3$, Δ.: Το $3\alpha^2$
- iv. Ποιο είναι τα Ε..ΚΠ. των $\chi + 1, \chi + 2$;
Α.: Το $(\chi + 1)(\chi + 2)$, Β.: Το $3\chi + 3$, Γ.: Το 3χ , Δ.: Το 2χ
- v. Ποιο είναι τα Ε..ΚΠ. των $\alpha - \beta, \beta - \alpha$;
Α.: Το $\alpha - \beta$, Β.: Το $(\alpha - \beta)(\beta - \alpha)$, Γ.: Το α , Δ.: Το β
- vi. Ποιο είναι τα Ε..ΚΠ. των $5(\chi - \psi), 2(\chi + \psi), \chi^2 - \psi^2$;
Α.: Το $\chi^2 - \psi^2$, Β.: Το $10(\chi^2 - \psi^2)$, Γ.: Το $10(\chi + \psi)^2$, Δ.: Το $10(\chi - \psi)^2$
- vii. Ποιο είναι τα Ε..ΚΠ. των $7\chi, 14\chi^2\psi, \psi$;
Α.: $14\chi^2\psi$, Β.: Το $14\chi^2\psi^2$, Γ.: Το $14\chi\psi$, Δ.: Το $14\chi^3\psi^2$

2.

Να κάνετε τις πράξεις:

- | | |
|--|---|
| i. $\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} - \frac{1}{3x}$ | vi. $\frac{\alpha}{\beta} - \frac{3}{4}$ |
| ii. $\frac{1}{\psi} - \frac{1}{\chi}$ | vii. $4\chi + \frac{1}{4\chi}$ |
| iii. $\frac{\lambda}{\kappa} - \frac{\kappa}{\lambda}$ | viii. $\frac{1}{\chi} + \chi + 1$ |
| iv. $\frac{\alpha}{\beta} + 1$ | ix. $\frac{5\chi}{\chi + 1} + \frac{5}{\chi + 1}$ |
| v. $\frac{\alpha}{\beta} - 1$ | |

3.

Να κάνετε τις πράξεις:

$$\begin{aligned} \text{i. } & \frac{\alpha}{2\beta} + 1 + \frac{\beta}{2\alpha} \\ \text{ii. } & \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^3} \\ \text{iii. } & \frac{3}{2\chi} - \frac{1}{\chi\psi} + \frac{2}{3\psi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iv. } & \frac{1}{\chi} - \frac{2}{\chi^2\psi} + \frac{1}{\psi\chi} \\ \text{v. } & 2 - \frac{2}{\chi} + \frac{4}{\chi^3} \end{aligned}$$

4.

Να κάνετε τις πράξεις:

$\begin{aligned} \text{i. } & \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \\ \text{ii. } & \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} \\ \text{iii. } & \frac{2}{x-2} + \frac{1}{2-x} - \frac{1}{x+2} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \text{iv. } & \frac{1}{\chi-2} + \frac{2}{(\chi-2)^2} \\ \text{v. } & \frac{1}{(2\chi-1)(\chi-1)} - \frac{1}{(1-2\chi)^2(\chi-1)} \\ \text{vi. } & \frac{1}{\chi+2} - \frac{\chi}{(\chi+2)^2} - \frac{2\chi}{(\chi+2)^3} \end{aligned}$
---	--

5.

Να κάνετε τις πράξεις: (Να κάνετε πρώτα γινόμενο τους παρονομαστές)

$\begin{aligned} \text{i. } & \frac{1}{\chi^2 + \chi\psi} + \frac{1}{\chi\psi + \psi^2} - \frac{1}{\chi\psi} \\ \text{ii. } & \frac{\alpha + \beta}{\alpha^2 - \alpha\beta} - \frac{2\beta}{\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2} + \frac{2\beta^2}{\alpha(\alpha - \beta)^2} \\ \text{iii. } & \frac{\psi}{\chi^2 - \chi\psi} - \frac{1}{\chi + \psi} - \frac{2\psi}{\chi^2 - \psi^2} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \text{iv. } & \frac{1}{\alpha\beta - \alpha\gamma + \beta\gamma - \beta^2} + \frac{1}{\beta\gamma - \alpha\beta + \alpha\gamma - \gamma^2} \\ \text{v. } & \frac{\alpha}{\alpha^2 - \alpha + 1} - \frac{2\alpha - 1}{\alpha^3 + 1} - \frac{1}{\alpha + 1} \\ \text{vi. } & \frac{\chi - \frac{5}{2}}{\chi^2 - 5\chi + 6} + \frac{1}{2\chi - 6} + \frac{1}{6 - 3\chi} \end{aligned}$
--	--

6.

α) Να αλλάξετε κάποια πρόσημα στους παράγοντες των γινομένων $(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)$, $(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)$, $(\gamma - \beta)(\alpha - \beta)$ ώστε να προκύψει το Ε.Κ.Π. τους. Ποιο είναι αυτό;

β) Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης

$$\frac{\alpha + \beta}{(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)} + \frac{\beta + \gamma}{(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)} + \frac{\gamma + \alpha}{(\gamma - \beta)(\alpha - \beta)} \text{ είναι πάντα ίση με το } 0.$$

γ) Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης

$$\frac{\alpha\beta}{(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)} + \frac{\beta\gamma}{(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)} + \frac{\gamma\alpha}{(\gamma - \beta)(\alpha - \beta)} \text{ είναι πάντα ίση με το } 1.$$

7.

Να κάνετε τις πράξεις:

$\begin{aligned} \text{i. } & \alpha(\alpha + 1) \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha + 1} \right) \\ \text{ii. } & (\alpha - \beta) : \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right) \end{aligned}$	$\begin{aligned} \text{iv. } & \frac{\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} - 1}{\alpha^3 + \beta^3} \cdot \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) \\ \text{v. } & \left(1 + \frac{1}{\chi} + \frac{1}{\chi^2} \right) : \left(\frac{1}{\chi^3} - 1 \right) \end{aligned}$
--	---

iii. $\left(\frac{1}{1-\frac{1}{\chi}} - \frac{1}{1+\frac{1}{\chi}} \right) \cdot \left(\frac{\chi}{2} - \frac{1}{2\chi} \right)$	vi. $\left(1 + \frac{1}{\alpha} \right)^2 - 2 \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) + \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right)$ vii. $\left(\frac{\frac{1}{\beta}}{1-\frac{\beta}{\alpha}} - \frac{\frac{1}{\alpha}}{\frac{\alpha}{\beta}-1} \right) : \left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha} \right)$
---	---

8.

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\frac{\alpha^8 - \beta^8}{2\beta^4} \left\{ \frac{1}{2\beta^2} \left[\frac{1}{2\beta} \left(\frac{1}{\alpha - \beta} - \frac{1}{\alpha + \beta} \right) - \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \right] - \frac{1}{\alpha^4 + \beta^4} \right\}$$