

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο
ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ
3.1 ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ.

1.

Ένας φοιτητής ξοδεύει 15 ευρώ την ημέρα για φαγητό και ψυχαγωγία. Πόσα χρήματα μπορεί να ξοδέψει για φαγητό και πόσα για ψυχαγωγία;

α) Γράψε μια πιθανή επιλογή του φοιτητή.

β) Αν ξοδέψει για φαγητό 10 ευρώ πόσα μπορεί να ξοδέψει για ψυχαγωγία;

.....

γ) Αν ξοδέψει για ψυχαγωγία 12 ευρώ πόσα μπορεί να ξοδέψει για φαγητό;

.....

δ) Το ζεύγος (9,5 , 5,5) είναι μια λύση του προβλήματος;

ε) Γράψε υπό μορφή ζευγών τρεις ακόμη λύσεις του προβλήματος.

στ) Αν ξοδέψει για φαγητό x δρχ. τότε για ψυχαγωγία πόσα μπορεί να ξοδέψει; $y = \dots - \dots$

ζ) Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να σου δώσει όλες τις λύσεις του προβλήματος;

2.

Ο Γιάννης είναι 5 χρόνια μικρότερος από τον Κώστα.

Πόσων χρόνων μπορεί να είναι ο καθένας;

α) Γράψε μια πιθανή απάντηση για την ηλικία του καθενός.

β) Γράψε δύο ζεύγη αριθμών που να είναι λύσεις του προβλήματος.

γ) Αν η ηλικία του Γιάννη είναι x και του Κώστα y γράψε την εξίσωση που μπορεί να δώσει τις λύσεις του προβλήματος.

δ) Ποια είναι η μικρότερη ακέραιη τιμή που μπορεί να πάρει ο x ;

ε) Ποιες τιμές μπορεί να πάρει ο y ;

3.

Δίνεται η εξίσωση $2y + x = 7$.

α) Να δείξετε ότι το ζεύγος $(-1, 4)$ είναι λύση αυτής της εξίσωσης.

β) Αν $x = 5$ να βρείτε $y = \dots$ ώστε το ζεύγος $(5, y)$ να είναι λύση της εξίσωσης.

γ) Σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε γραφικά τις λύσεις της εξίσωσης $2y + x = 7$.

4.

Δίνεται η εξίσωση $5x + y = 6$.

Αποδείξτε ότι το ζεύγος $(x = \kappa, y = 6 - 5\kappa)$, $\kappa \in \mathbb{R}$ επαληθεύει την εξίσωση.

5.

Οι x, y, λ είναι πραγματικοί αριθμοί και ισχύει: $x = 2 - 3\lambda$ και $y = 5 + 2\lambda$.

α) Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα x και y .

β) Σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων, πού βρίσκονται τα ζεύγη (x, y) που επαληθεύουν την παραπάνω σχέση;

6.

Δύο φίλοι Α και Β έχουν άθροισμα ηλικιών 35 χρόνια.

α) Μπορείτε να υπολογίσετε την ηλικία του καθενός;

Αν ναι, ποιες είναι οι ηλικίες τους; Αν όχι, γιατί;

β) Εάν σας έδιναν και ένα δεδομένο ακόμη: «Η διαφορά των ηλικιών των

Α και Β είναι 5 χρόνια», πώς θα υπολογίζατε τις ηλικίες αυτές;

7.

Σ' ένα πορτοφόλι υπάρχουν 14 ευρώ σε κέρματα του ενός και των δύο ευρώ. Πόσα κέρματα του ενός και πόσα των δύο ευρώ υπάρχουν στο πορτοφόλι;

α) Γράψε μια εξίσωση με δύο αγνώστους x και y που να λύνει το πρόβλημα.

β) Το πρόβλημα αυτό έχει μία ή περισσότερες λύσεις; Δικαιολόγησε την απάντησή σου.

γ) Είναι δυνατόν ο αριθμός των κερμάτων του ενός ευρώ να είναι ίσος με τον αριθμό των κερμάτων των δύο ευρώ; Αν ναι, πόσα θα είναι τα κέρματα του ενός και πόσα των δύο ευρώ; Αν όχι, γιατί;

8.

Να υπολογίσετε την τιμή του λ ώστε η εξίσωση $x + y + 3\lambda - 6 = 0$ να έχει λύση το ζευγάρι των αριθμών $(2, -1)$;

9.

Η γραμμική εξίσωση που επαληθεύεται με κάθε ζεύγος της μορφής

$x = \kappa - 2$, και $y = \kappa + 1$, $\kappa \in \mathbb{R}$ είναι:

A. $y - 2x = 5$

B. $x - y = -3$

Γ. $x - y = 2$

Δ. $x - y = 1$

E. $2x + y = 7$

(Επιλέξτε την σωστή εξίσωση).

10.

Για τους αριθμούς $x, y \in \mathbb{R}^*$ έχουμε τα δεδομένα στη στήλη (A). Συνδέστε με μια γραμμή τα δεδομένα αυτά με το αντίστοιχες εξισώσεις της στήλης (B).

στήλη (A) Δεδομένα για τους $x, y \in \mathbb{R}^*$	στήλη (B) Εξισώσεις
1. Έχουν άθροισμα 12 και λόγο 5	$x - y = 12$ $3y = x$
2. Διαφέρουν κατά 12 και το x είναι τριπλάσιο του y	$x + y = 6$ $xy = 8$
3. Είναι πλευρές ορθογωνίου παραλληλογράμμου με περίμετρο 12 και εμβαδόν 8	$xy = 6$ $x - y = 8$
	$x + y = 12$ $x = 5y$
	$x + y = 0$ $x + 3 = -y$
	$x - y = 0$ $x + y = 3$

3.2 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2^{ου} ΒΑΘΜΟΥ

1.

Καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις μπορεί να είναι **σωστή**, μπορεί όμως να είναι **λάθος**. Γράψτε δίπλα από κάθε πρόταση το **Σ** αν αυτή είναι σωστή και το **Λ** αν αυτή είναι λάθος.

- Η εξίσωση $2\chi^2 - 2\chi = 0$ είναι εξίσωση 2^{ου} βαθμού.
- Η εξίσωση $3\chi^2 + 1 = 0$ είναι εξίσωση 2^{ου} βαθμού.
- Η εξίσωση $(\lambda - 1)\chi^2 - \chi + 4 = 0$ είναι εξίσωση 2^{ου} βαθμού για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού λ .
- Η εξίσωση $\chi^2 - \chi(\chi + 1) - 2 = 0$ είναι εξίσωση 2^{ου} βαθμού.
- Αν η εξίσωση $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες τότε $\beta^2 < 4\alpha\gamma$
- Η εξίσωση $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ με $\gamma = 0$ έχει πάντα δύο ρίζες.
- Η εξίσωση $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ με $\alpha\gamma < 0$ έχει πάντα δύο άνισες ρίζες.
- Η εξίσωση $\alpha\chi^2 + \beta\chi = 0$, $\alpha \neq 0$ έχει ρίζες το 0 και το $\frac{\beta}{\alpha}$
- Η εξίσωση $\alpha\chi^2 + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ έχει πάντα δύο ρίζες τους αριθμούς $\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}$ και $-\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}$
- Αν $\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 > \alpha\gamma$ τότε η εξίσωση $\alpha\chi^2 + \beta\chi = 0$, $\alpha \neq 0$ έχει δύο άνισες ρίζες.

2.

Να συμπληρώσεις τα κενά:

Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ με διακρίνουσα Δ :

- έχει δύο ρίζες άνισες, αν Δ
- έχει μια διπλή ρίζα, αν Δ
- δεν έχει καμιά πραγματική ρίζα, αν Δ

3. Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της πρώτης στήλης του παρακάτω πίνακα με ένα στοιχείο της δεύτερης στήλης του συμπληρώνοντας τον δεύτερο πίνακα.

Οι ερωτήσεις 1-6 βασίζονται στον παρακάτω πίνακα.			
στήλη (Α) Εξίσωση 2 ^{ου} βαθμού		στήλη (Β) Διακρίνουσα εξίσωσης	
1. $x^2 - \alpha = 0$		A. α^2	
2. $x^2 - \alpha x = 0$		B. 4α	
3. $x^2 - 3x - \alpha = 0$		C. $9 + 4\alpha$	
4. $-x^2 + \alpha x + 3 = 0$		D. α^2	
		E. $\alpha^2 + 12$	
		F. $\alpha^2 - 12$	
1	2	3	4

4.

Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις ως προς x ή y :

α) $x^2 - 4x = 0$

β) $3x^2 = 4x$

γ) $2x^2 + x - 15 = 0$

δ) $5x^2 - 18x - 8 = 0$

ε) $x^2 - 6x + 7 = 0$

στ) $y^2 - y + 1 = 0$

ζ) $y^2 - (α + 3)y + 3α = 0$

η) $-0,5x^2 + 5x + 1 = 0$

θ) $x^2 + 4κx - 21κ^2 = 0$

ι) $4x^2 - 4κx - 35κ^2 = 0$

κ) $8y^2 = 10κy + 3κ^2$

5.

Δίνεται η εξίσωση $(λ^2 - 3λ + 2)x^2 + (λ - 2)x + 3 = 0$. Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός $λ$ ώστε η παραπάνω εξίσωση:

α) να έχει μία μόνο ρίζα

β) να έχει διπλή ρίζα

6.

Τα μήκη των τριών πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι τρεις διαδοχικοί ακέραιοι αριθμοί. Να βρεθούν οι αριθμοί αυτοί.

7.

Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι 25 cm^2 . Πότε το ορθογώνιο έχει την ελάχιστη περίμετρο και ποια είναι αυτή;

8.

Σε τραπέζιο το άθροισμα των βάσεων του και του ύψους του είναι 10.

α) Για ποια τιμή του ύψους του το εμβαδόν του τραπεζίου γίνεται μέγιστο;

β) Πόσο είναι το εμβαδόν αυτό;

9.

Η πλευρά ενός τετραγώνου είναι 4 cm μεγαλύτερη από την πλευρά ενός άλλου τετραγώνου. Βρείτε τις πλευρές τους αν γνωρίζουμε ότι η διαφορά των εμβαδών τους είναι 88 cm^2 .

10.

Το πλήθος των διαγωνίων ενός πολυγώνου με n πλευρές δίνεται από τον τύπο: $\delta_n = \frac{n(n-3)}{2}$. Αν το πολύγωνο

έχει 104 διαγωνίους, πόσες είναι οι πλευρές του;

11.

Το άθροισμα των n πρώτων φυσικών αριθμών δίνεται από τον τύπο:

$$\Sigma_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Βρείτε το n , αν ξέρουμε ότι $\Sigma_n = 300$.

12.

Το εμβαδόν μιας σελίδας ενός βιβλίου είναι 300 cm^2 . Αν το μήκος της είναι 5 cm μεγαλύτερο από το πλάτος της, βρείτε τις διαστάσεις της σελίδας.

13.

Να λυθούν οι διτετράγωνες εξισώσεις:

α) $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$

β) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

γ) $x^4 - 2x^2 - 15 = 0$

δ) $6y^4 + 17y^2 = -12$

ε) $x^4 - 2(\alpha^2 + \beta^2)x^2 + (\alpha^2 - \beta^2)^2 = 0$

14. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $|x|^2 + 2|x| + 1 = 0$

β) $|x - 1|^2 - 4 = 3|x - 1|$

15. Να λυθεί η εξίσωση:

$$x^4 - (\alpha + 1)x^2 + \alpha = 0$$

16. Ποιο είναι το κ , όταν η εξίσωση $\kappa x^2 - 4x - 35 = 0$ έχει άθροισμα ριζών ίσο με 1;