



- ① (α) Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2 e^{1-x}$. Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού της, τα σημεία τομής με τους άξονες, τα διαστήματα μονοτονίας, τα ακρότατα, τα σημεία καμπής και τις ασύμπτωτές της, να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

(β) Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από πλήρη περιστροφή γύρω από την ευθεία $x = 2$ του χωρίου (S) που περικλείεται από τα γραφήματα των καμπύλων (C_1) και (C_2) καθοριζόμενα από τις εξισώσεις $y = \text{τοξημ}x, x \in [0,1]$ και $y = \text{τοξσιν}x, x \in [0,1]$ αντίστοιχα και τον άξονα των τετμημένων.

- ② Για $m \in \{2,3, \dots\}$ θεωρούμε την ακολουθία $(a_n^m)_{n \in \{0,1,2, \dots, m\}}$ με $a_n^m = 3^{\frac{n}{m}}$.

(α) Για κάθε $m \in \{2,3, \dots\}$, να δείξετε ότι $a_{n+1}^m - a_n^m = 3^{\frac{n}{m}} \left(3^{\frac{1}{m}} - 1 \right)$ για κάθε $n \in \{0,1,2,3, \dots, m\}$

(β) Αν $m \in \{2,3, \dots\}$ και $\delta_n^m = a_{n+1}^m - a_n^m, n \in \{0,1,2,3, \dots, m\}$, να υπολογίσετε (συναρτήσει του m) το άθροισμα

$$S_m = \sum_{n=0}^m (a_n^m)^2 \cdot \delta_n^m$$

- ③ Δίνεται η έλλειψη

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

όπου $a > b > 0$ και σημείο $M(\alpha \sigma \nu \theta, \beta \eta \mu \theta)$ με $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Αν η εφαπτομένη της έλλειψης στο M τέμνει τον άξονα Ox στο σημείο P και τον άξονα των Oy στο σημείο Γ ενώ η κάθετη αυτής στο σημείο M τέμνει τον άξονα Ox στο σημείο Σ .

(α) Να δείξετε ότι ισχύει

$$\frac{a^2}{(OP)^2} + \frac{b^2}{(OG)^2} = 1 \quad \text{και} \quad (OP) \cdot (O\Sigma) = (\varepsilon \cdot a)^2,$$

όπου ε η εκκεντρότητα της έλλειψης.

(β) Να ευρεθεί εκείνη η τιμή του $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ για την οποία το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την έλλειψη, το ευθύγραμμο τμήμα (GP) και τον άξονα των τετμημένων γίνεται το μέγιστο δυνατό το οποίο και να προσδιορίσετε.

- ④ (α) Να δείξετε ότι $\eta \mu x \leq x, \forall x \in [0, 2\pi]$. (β) Να δείξετε ότι $1 - \frac{x^2}{2} \leq \sigma \nu \eta x, \forall x \in [0, 2\pi]$.

- ⑤ Είναι γνωστό ότι αν $\vec{u}$ είναι η συνάρτηση που δίνει την ταχύτητα ενός κινητού συναρτήσει του χρόνου t (σε δευτερόλεπτα) έτσι ώστε $\vec{u}(t) \geq 0, \forall t \geq 0$, τότε η συνάρτηση S που δίνει την απόσταση (σε μέτρα) που διένυσε το κινητό σε χρόνο t δίνεται από τον τύπο

$$S(t) = \int_0^t \vec{u}(x) dx, t \geq 0$$

(α) Αν το κινητό κάλυψε συνολική απόσταση 1 μέτρο στο πρώτο δευτερόλεπτο, να δείξετε ότι υπήρξε χρονική στιγμή t στο χρονικό αυτό διάστημα κατά την οποία η ταχύτητά του ήταν διπλάσια της απόστασης που κάλυψε (μέχρι το σημείο αυτό).

(β) Αν η ταχύτητα του κινητού δίνεται από την

$$\vec{u}(t) = \frac{1}{t^2 + t + 1}, t \geq 0,$$

να δείξετε ότι η συνάρτηση της απόστασης είναι κοίλη.

- ⑥ Θεωρούμε τις συναρτήσεις f και g με τύπο $f(x) = (2x - 1)^2 - 1$ και $g(x) = -x^2$ αντίστοιχα.

(α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου το οποίο περικλείεται από τα γραφήματα των δυο αυτών συναρτήσεων, την ευθεία με εξίσωση $x = 0$ και την ευθεία με εξίσωση $x = 1$.

(β) Να υπολογίσετε τον όγκο του χωρίου που δημιουργείται όταν το χωρίο που περικλείεται από τα γραφήματα των δυο συναρτήσεων, την ευθεία με εξίσωση $x = 0$ και την ευθεία με εξίσωση $x = \frac{4}{5}$ περιστραφεί πλήρως γύρω από τον άξονα των τετμημένων.

(γ) Έστω $n \geq 3$ ένας φυσικός αριθμός. Δείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{\frac{n+1}{2}} (f(k) + 1) - 4 \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} g(k) = \sum_{k=1}^n k$$

7 Ένας καθηγητής Μαθηματικών τοποθετεί μια ομάδα n μαθητών σε μια ευθεία γραμμή.

(α) Αν στους μαθητές υπάρχουν 2 ζεύγη διδύμων, να βρείτε, συναρτήσει του n , την πιθανότητα του ενδεχομένου όπως τα 4 αδέρφια να μη στέκονται το ένα δίπλα στο άλλο.

(β) Να βρείτε τον ελάχιστο αριθμό μαθητών που απαιτούνται ώστε η πιθανότητα που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα να είναι τουλάχιστον $\frac{3}{4}$.

(γ) Αν $n \leq 300$, να βρείτε, συναρτήσει του n , την πιθανότητα του ενδεχομένου όπως η παράταξη των μαθητών να περιέχει τουλάχιστον 2 άτομα που να έχουν γενέθλια την ίδια μέρα του χρόνου (1χρόνος=365 μέρες).

8 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(1010 - x) + f(1010 + x) = \frac{\alpha}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$$

όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

(α) Να αποδείξετε ότι

$$\int_0^{2020} f(2020 - x) dx = \int_0^{2020} f(x) dx = 505\alpha$$

(β) Υπολογίστε το

$$\int_0^{2020} \frac{3 + e^{1010-x}}{1 + e^{1010-x}} dx$$

9 Δίνεται η οικογένεια συναρτήσεων $f_c: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f_c(x) = -\frac{1}{c}(x^2 - 4x), \quad (c > 0)$$

(α) Να βρείτε το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ των γραφημάτων των συναρτήσεων f_{2k-1} και f_{2k+1} όπου k σταθεροποιημένος φυσικός αριθμός.

(β) Αν E_k το εμβαδόν του προηγούμενου ερωτήματος, να υπολογίσετε το

$$S_n = \sum_{k=1}^n E_k$$

για κάθε n φυσικό αριθμό και να εξετάσετε αν η σειρά

$$\sum_{k=1}^{+\infty} E_k$$

συγκλίνει.

Οι ασκήσεις 2, 3 (β), 5, 6 είναι ιδιοκατασκευές



Λύσεις

1 (α) Εύρεση πεδίου ορισμού:

Η συνάρτηση f γράφεται ως $h \cdot g$ όπου h και g οι συναρτήσεις με τύπους $h(x) = (x-2)^2$ και $g(x) = e^x$ αντίστοιχα. Κατα συνέπεια,

$$D(f) = D(g) \cap D(h)$$

Αλλά, $D(g) = \mathbb{R} = D(h)$ και αρα $D(f) = \mathbb{R}$.

* Παρατηρούμε επίσης ότι $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. * (βοηθητικό)

Εύρεση σημείων τομής με άξονες: $f(0) = 0 \rightarrow (0,0)$

Εύρεση διαστημάτων μονotonίας και Τ.Α.: Η συνάρτηση είναι δις παραγωγίσιμη με συνεχή δεύτερη παράγωγο. Είναι $\forall x \in D(f) = \mathbb{R}, f'(x) = -x(x-2)e^{1-x}$. Είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, 2$. Έτσι, η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(2, +\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο $(0, 2)$. Παρουσιάζει δε μέγιστο στο $(2, f(2)) = (2, \frac{4}{e})$ και ελάχιστο στο $(0, f(0)) = (0, 0)$.

Κυρτότητα συνάρτησης: Είναι $\forall x \in D(f) = \mathbb{R}, f''(x) = (x^2 - 4x + 2)e^{1-x}$. Εύκολα βρίσκουμε ότι και $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{2}$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
f'	-		+	-
f	$\searrow$		$\nearrow$	$\searrow$
	min		max	

x	$-\infty$	$2 - \sqrt{2}$	$2 + \sqrt{2}$	$+\infty$
f''	-		+	-
f	$\curvearrowright$		$\curvearrowleft$	$\curvearrowright$
	Σ.Κ.		Σ.Κ.	

Έτσι, η f είναι κυρτή στα διαστήματα $(-\infty, 2 - \sqrt{2})$ και $(2 + \sqrt{2}, +\infty)$ και κοίλη στο $(2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}) \approx (0.6, 3.41) =$. Παρουσιάζει δε Σ.Κ. στα $(2 - \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2})$ και $(2 + \sqrt{2}, f(2 + \sqrt{2})) \approx (3.41, 1.04)$

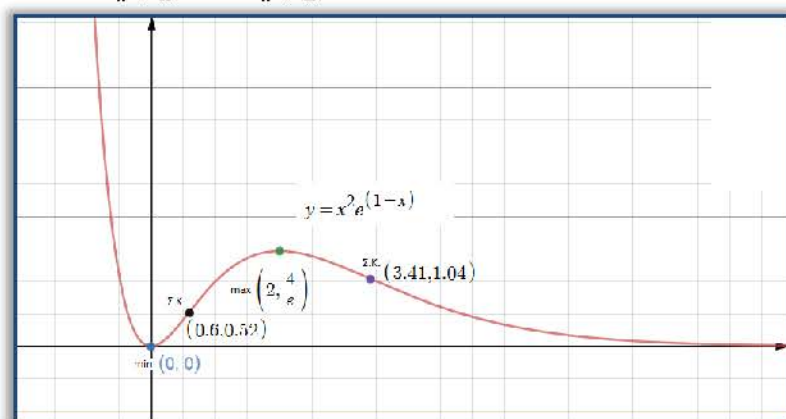
Ασύμπτωτική συμπεριφορά της συνάρτησης καθώς $x \rightarrow \pm\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{1-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^{x-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^{x-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^{x-1}} = 0$$

(εφαρμόσαμε 2 φορές τον κανόνα του deL'Hospital)

και αρα ο άξονας των τετμημένων είναι οριζόντια ασύμπτωτη της συνάρτησης. Επίσης

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{1-x} = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$$



(β)

$$(S) = \{0 \leq x \leq 1, \quad \text{τοξημ}x \leq y \leq \text{τοξσυν}x\}$$

Είναι $\text{τοξημ}x = \text{τοξσυν}x \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ στο διάστημα $[0,1]$. Επίσης, $y = \text{τοξημ}x \Leftrightarrow x = \eta\mu y$ και $y = \text{τοξσυν}x \Leftrightarrow x = \sigma\upsilon\nu y$ και $\text{τοξημ}0 = 0, \text{τοξσυν}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{τοξσυν}1 = 0$

Εξωτερική ακτίνα : $\rho_2 = 2 - \eta\mu y$, **Εσωτερική ακτίνα** : $\rho_1 = 2 - \sigma\upsilon\nu y$ και

$$(S) = \left\{ 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}, \quad \eta\mu y \leq x \leq \sigma\upsilon\nu y \right\}$$

και άρα

$$\begin{aligned} V(S) &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(2 - \eta\mu y)^2 - (2 - \sigma\upsilon\nu y)^2] dy = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4\sigma\upsilon\nu y - 4\eta\mu y - \sigma\upsilon\nu(2y)) dy \\ &= 4\pi \left[\sigma\upsilon\nu y + \eta\mu y - \frac{\eta\mu(2y)}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi \end{aligned}$$

2 Έστω $m \in \{2, 3, \dots\}$. Έχουμε για $n \in \{0, 1, 2, 3, \dots, m\}$ σταθεροποιημένο,

$$\begin{aligned} S_m &= \sum_{v=0}^m (\alpha_v^m)^2 \cdot \delta_v^m = \sum_{v=0}^m \left(3^{\frac{v}{m}}\right)^2 \cdot 3^{\frac{v}{m}} \cdot \left(3^{\frac{1}{m}} - 1\right) = \sum_{v=0}^m 3^{\frac{2v}{m}} \cdot 3^{\frac{v}{m}} \cdot \left(3^{\frac{1}{m}} - 1\right) = \left(3^{\frac{1}{m}} - 1\right) \cdot \sum_{v=0}^m 3^{\frac{2v}{m}} \cdot 3^{\frac{v}{m}} \\ &= \left(3^{\frac{1}{m}} - 1\right) \cdot \sum_{v=0}^m 3^{\frac{2v}{m}} \cdot 3^{\frac{v}{m}} = \left(3^{\frac{1}{m}} - 1\right) \cdot \sum_{v=0}^m 3^{\frac{3v}{m}} = \left(3^{\frac{1}{m}} - 1\right) \cdot \sum_{v=0}^m \left(3^{\frac{3}{m}}\right)^v = \left(3^{\frac{1}{m}} - 1\right) \cdot \left[\sum_{v=0}^{m-1} \left(3^{\frac{3}{m}}\right)^v + \left(3^{\frac{3}{m}}\right)^m \right] \\ &= \left(3^{\frac{1}{m}} - 1\right) \cdot \left[\sum_{v=0}^{m-1} \left(3^{\frac{3}{m}}\right)^v + 27 \right] \end{aligned}$$

(το 27 προκύπτει ως ο τελευταίος όρος του αρχικού αθροίσματος, δηλ. ο όρος για $v = m$ και το κάνουμε αυτό για να χρησιμοποιήσω το άθροισμα m πρώτων όρων Γ.Π.)

Για τον υπολογισμό του $\sum_{v=0}^{m-1} \left(3^{\frac{3}{m}}\right)^v$, παρατηρούμε ότι οι όροι του είναι όροι Γ.Π. με λόγο $\lambda = 3^{\frac{3}{m}}$ και άρα

$$\sum_{v=0}^{m-1} \left(3^{\frac{3}{m}}\right)^v = \frac{\left(3^{\frac{3}{m}}\right)^{m-1} - 3^{\frac{3}{m}}}{3^{\frac{3}{m}} - 1}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} S_m &= \left(3^{\frac{1}{m}} - 1\right) \cdot \left[\sum_{v=0}^{m-1} \left(3^{\frac{3}{m}}\right)^v + 27 \right] = \left(3^{\frac{1}{m}} - 1\right) \cdot \sum_{v=0}^{m-1} \left(3^{\frac{3}{m}}\right)^v + 27 \left(3^{\frac{1}{m}} - 1\right) \\ &= \left(3^{\frac{1}{m}} - 1\right) \cdot \frac{\left(3^{\frac{3}{m}}\right)^{m-1} - 3^{\frac{3}{m}}}{3^{\frac{3}{m}} - 1} + 27 \left(3^{\frac{1}{m}} - 1\right) = \left(3^{\frac{3}{m}}\right)^{m-1} - 3^{\frac{3}{m}} + 27 \left(3^{\frac{1}{m}} - 1\right) \end{aligned}$$

3 Το σημείο M ευρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο, αφού $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu\theta \neq 0$. Επίσης,

$$\frac{(\alpha\sigma\upsilon\nu\theta)^2}{\alpha^2} + \frac{(\beta\eta\mu\theta)^2}{\beta^2} = \frac{\alpha^2\sigma\upsilon\nu^2\theta}{\alpha^2} + \frac{\beta^2\eta\mu^2\theta}{\beta^2} = \sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta = 1$$

και άρα το σημείο $M(\alpha\sigma\upsilon\nu\theta, \beta\eta\mu\theta)$ ανήκει πράγματι στην έλλειψη.

(α) Βύρεση της εξίσωσης της εφαπτομένης στο σημείο M

Παραγωγίζοντας πεπλεγμένα την εξίσωση της καμπύλης, έχουμε

$$\frac{2}{\alpha^2}x + \frac{2}{\beta^2}y \frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\beta^2}{\alpha^2} \cdot \frac{x}{y}$$

και στο σημείο $M\left(\frac{\alpha \sigma \nu \theta}{x(\theta)}, \frac{\beta \eta \mu \theta}{y(\theta)}\right)$ είναι

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=\alpha \sigma \nu \theta} = -\frac{\beta^2}{\alpha^2} \cdot \frac{\alpha \sigma \nu \theta}{\beta \eta \mu \theta} = -\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\sigma \nu \theta}{\eta \mu \theta}$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο M είναι

$$\begin{aligned} y - \beta \eta \mu \theta &= -\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\sigma \nu \theta}{\eta \mu \theta} (x - \alpha \sigma \nu \theta) \Leftrightarrow \alpha \eta \mu \theta (y - \beta \eta \mu \theta) = -\beta \sigma \nu \theta (x - \alpha \sigma \nu \theta) \\ &\Leftrightarrow (\alpha \eta \mu \theta) y - \alpha \beta \eta \mu^2 \theta = -(\beta \sigma \nu \theta) x + \alpha \beta \sigma \nu^2 \theta \\ &\Leftrightarrow (\alpha \eta \mu \theta) y + (\beta \sigma \nu \theta) x = \alpha \beta (\sigma \nu^2 \theta + \eta \mu^2 \theta) \\ &\Leftrightarrow (\alpha \eta \mu \theta) y + (\beta \sigma \nu \theta) x = \alpha \beta \end{aligned}$$

Θέτοντας στην εξίσωση της εφαπτομένης $y = 0$, βρίσκουμε το σημείο $P: P\left(\frac{\alpha}{\sigma \nu \theta}, 0\right) \equiv P(\alpha \tau \epsilon \mu \theta, 0)$

Εύρεση της εξίσωσης της καθέτου στο σημείο M

Είναι $\lambda_{\kappa \acute{\alpha} \theta} \cdot \lambda_{\epsilon \varphi} = -1$ και αφού $\lambda_{\kappa \acute{\alpha} \theta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\eta \mu \theta}{\sigma \nu \theta}$. Έτσι,

$$\begin{aligned} y - \beta \eta \mu \theta &= \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\eta \mu \theta}{\sigma \nu \theta} (x - \alpha \sigma \nu \theta) \Leftrightarrow \beta \sigma \nu \theta (y - \beta \eta \mu \theta) = \alpha \eta \mu \theta (x - \alpha \sigma \nu \theta) \\ &\Leftrightarrow (\beta \sigma \nu \theta) y - \beta^2 \sigma \nu \theta \eta \mu \theta = (\alpha \eta \mu \theta) x - \alpha^2 \beta \sigma \nu \theta \eta \mu \theta \Leftrightarrow (\beta \sigma \nu \theta) y - (\alpha \eta \mu \theta) x = \sigma \nu \theta \eta \mu \theta (\beta^2 - \alpha^2) \\ &\Leftrightarrow y - \frac{\alpha \eta \mu \theta}{\beta \sigma \nu \theta} x = \frac{1}{\beta} \eta \mu \theta (\beta^2 - \alpha^2) \end{aligned}$$

Θέτοντας στην εξίσωση της καθέτου $y = 0$, βρίσκουμε το σημείο $\Sigma: \Sigma\left(\frac{\sigma \nu \theta}{\alpha} (\beta^2 - \alpha^2), 0\right)$

Είναι

$$(OP) = \sqrt{\left(\frac{\alpha}{\sigma \nu \theta}\right)^2} = \frac{\alpha}{\sigma \nu \theta} \text{ και } (O\Gamma) = \sqrt{\left(\frac{\beta}{\eta \mu \theta}\right)^2} = \frac{\beta}{\eta \mu \theta}$$

Συνεπώς,

$$\frac{\alpha^2}{(OP)^2} + \frac{\beta^2}{(O\Gamma)^2} = \frac{\alpha^2}{\frac{\alpha^2}{\sigma \nu^2 \theta}} + \frac{\beta^2}{\frac{\beta^2}{\eta \mu^2 \theta}} = \sigma \nu^2 \theta + \eta \mu^2 \theta = 1$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} (O\Sigma) &= \sqrt{\left(\frac{\sigma \nu \theta}{\alpha} (\beta^2 - \alpha^2)\right)^2} = \frac{\sigma \nu \theta}{\alpha} (\beta^2 - \alpha^2) \\ (OP) \cdot (O\Sigma) &= \frac{\alpha}{\sigma \nu \theta} \cdot \frac{\sigma \nu \theta}{\alpha} (\beta^2 - \alpha^2) = \beta^2 - \alpha^2 = (\epsilon \cdot \alpha)^2 \end{aligned}$$

Αλλά,

$$\epsilon^2 = \frac{\gamma^2}{\alpha^2} = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\alpha^2} \Rightarrow (\epsilon \cdot \alpha)^2 = \beta^2 - \alpha^2$$

και το ζητούμενο έπεται.

(γ) Το εμβαδόν του μικτόγραμμου χωρίου MPN , όπου $N(\alpha, 0)$ ισούται με

$$E_{\text{τριγ. } \omega \nu \nu \text{ } OP\Gamma} - \frac{1}{4} E_{\text{ελλειψης}}$$

Είναι

$$E_{\text{τριγ. } \omega \nu \nu \text{ } OP\Gamma} = \frac{(OP) \cdot (O\Gamma)}{2} = \frac{\frac{\alpha}{\sigma \nu \theta} \cdot \frac{\beta}{\eta \mu \theta}}{2} = \frac{\alpha \beta}{2 \eta \mu \theta \sigma \nu \theta} = \frac{\alpha \beta}{\eta \mu (2\theta)}$$

και

$$\frac{1}{4} E_{\text{ελλειψης}} = \alpha \int_0^\beta \sqrt{1 - \frac{y^2}{\beta^2}} dy = \frac{\alpha}{\beta} \int_0^\beta \sqrt{\beta^2 - y^2} dy.$$

Για τον υπολογισμό του (αόριστου) ολοκληρώματος $\int \sqrt{\beta^2 - y^2} dy$ θεωρούμε την τριγωνομετρική αντικατάσταση

$$y(\theta) = \beta \eta \mu \theta, \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Η αντικατάσταση αυτή μετασχηματίζει το $\int \sqrt{\beta^2 - y^2} dy$ στο

$$\int \beta \sqrt{\beta^2 - \beta^2 \eta \mu^2 \theta} \sigma \nu \nu \theta d\theta = \beta \int \beta \sqrt{1 - \eta \mu^2 \theta} \sigma \nu \nu \theta d\theta \\ = \beta^2 \int \sqrt{\sigma \nu \nu^2 \theta} \sigma \nu \nu \theta d\theta = \beta^2 \int \sigma \nu \nu \theta \cdot \sigma \nu \nu \theta d\theta = \frac{\beta^2}{2} (\theta + \eta \mu(\theta) \cdot \sigma \nu \nu(\theta)) + c$$

όπου η σταθερά c απορρόφησε το β^2 . Επιστρέφοντας στην αρχική μας μεταβλητή, έχουμε:

$$\theta = \tau \omicron \xi \eta \mu \left(\frac{y}{\beta} \right) \text{ και } \sigma \nu \nu(\theta) = \sqrt{1 - \frac{y^2}{\beta^2}} = \beta \sqrt{\beta^2 - y^2}$$

και αρα

$$\int \sqrt{\beta^2 - y^2} dy = \frac{\beta^2}{2} \left(\tau \omicron \xi \eta \mu \left(\frac{y}{\beta} \right) + y \sqrt{\beta^2 - y^2} \right) + c$$

Τελικά,

$$\frac{\alpha}{\beta} \int_0^\beta \sqrt{\beta^2 - y^2} dy = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta^2}{2} \left[\tau \omicron \xi \eta \mu \left(\frac{y}{\beta} \right) + y \sqrt{\beta^2 - y^2} \right]_0^\beta = \frac{\beta \alpha}{2} (\tau \omicron \xi \eta \mu 1) \\ = \frac{\beta \alpha}{2} \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{4} \pi \beta \alpha$$

Έτσι,

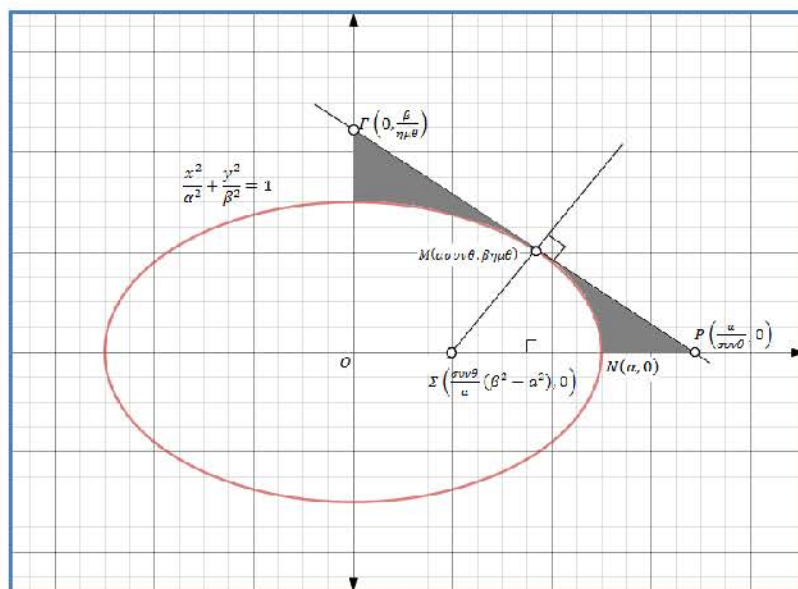
$$E_{MPN}(\theta) = E_{\tau \rho \gamma \omega \nu \nu \text{ OPI}} - \frac{1}{4} E_{\acute{\epsilon} \lambda \lambda \epsilon \upsilon \phi \eta \varsigma} = \frac{\alpha \beta}{\eta \mu(2\theta)} - \frac{1}{4} \pi \beta \alpha, \quad \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Είναι

$$E'_{MPN}(\theta) = -2 \frac{\eta \mu(2\theta)}{\sigma \nu \nu^2(2\theta)} = -2 \varepsilon \varphi(2\theta) \tau \epsilon \mu(2\theta)$$

και εύκολα βλέπουμε ότι $E'_{MPN}(\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$ στο πιο πάνω διάστημα. Στο σημείο αυτό, η συνάρτηση λαμβάνει τοπικό μέγιστο. Έτσι, για $\theta = \frac{\pi}{4}$ έχουμε το μέγιστο εμβαδόν, το οποίο είναι το

$$\alpha \beta - \frac{1}{4} \pi \beta \alpha = \alpha \beta \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) \text{ τ.μ.}$$



- 4 (α) Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x - \eta\mu x, x \in [0, 2\pi]$. Είναι παραγωγίσιμη και $f'(x) = 1 - \sigma\upsilon\nu x, x \in [0, 2\pi]$. Έχουμε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = 1$ (στο διάστημα $[0, 2\pi]$). Λύνοντας την εξίσωση αυτή στο εν λόγω διάστημα, αυτή έχει 2 λύσεις, τις $x = 0, 2\pi$. Αλλά, $\forall x \in [0, 2\pi] -1 \leq \sigma\upsilon\nu x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 1 - \sigma\upsilon\nu x \leq 2$, δηλ. $0 \leq f'(x), \forall x \in [0, 2\pi]$. Συνεπώς, η f είναι αύξουσα στο διάστημα $[0, 2\pi]$ και αφού $f(0) = 0$, έπεται ότι $f(x) \geq 0, \forall x \in [0, 2\pi]$ και το συμπέρασμα έπεται.

(β) Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \sigma\upsilon\nu x, x \in [0, 2\pi]$. Είναι παραγωγίσιμη και $f'(x) = \eta\mu x - x, x \in [0, 2\pi]$. Έχουμε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \eta\mu x$ (στο διάστημα $[0, 2\pi]$). Λύνοντας την εξίσωση αυτή στο εν λόγω διάστημα, αυτή έχει μοναδική λύση, την $x = 0$. Από το προηγούμενο ερώτημα, έχουμε ότι $f'(x) \leq 0, \forall x \in [0, 2\pi]$ και άρα η συνάρτηση f είναι φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Επειδή είναι συνεχής (σε κλειστό διάστημα), ελέγχουμε (συνεπεία του Θεωρήματος Μεγίστης/Ελαχίστης τιμής) τις τιμές στα άκρα του διαστήματος: $f(0) = 0$ και $f(2\pi) = 2\pi - 2\pi^2 - 1 < 0$.¹ Συνεπώς, $f(x) \leq 0, \forall x \in [0, 2\pi]$, δηλ. $1 - \frac{x^2}{2} \leq \sigma\upsilon\nu x, \forall x \in [0, 2\pi]$. Η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$.

- 5 (α) Η συνάρτηση S η οποία εκφράζει τη συνολική απόσταση που διένυσε το κινητό από την εκκίνησή του μέχρι χρόνο t sec είναι η $S: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$S(t) = \int_0^t |\vec{u}(x)| dx$$

(β) Είναι $\vec{u}(x) \geq 0, \forall x \geq 0$. Από το 1ο ΘΘΑΛ, η S είναι **συνεχής** συνάρτηση στο $[0, 1]$, **διαφορίσιμη** στο $(0, 1)$ και ισχύει $S'(x) = \vec{u}(x), \forall x \in (0, 1)$. Επίσης, $S(0) = 0$ και $S(1) = \int_0^1 \vec{u}(x) dx = 1$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $G: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$x \mapsto G(x) = S(x) - x^2$$

Ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle για την G στο διάστημα $[0, 1]$: υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $G'(\xi) = 0$. Αλλά, $G'(x) = S'(x) - 2x = \vec{u}(x) - 2x, \forall x \in (0, 1)$. Έτσι, υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $\vec{u}(\xi) = 2\xi$.

Επίσης, από το Πόρισμα του 1ου Θεμελιώδους Θεωρήματος του Απειροστικού Λογισμού, έπεται ότι είναι παραγωγίσιμη και

$$F'(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}, \quad \forall x \in [0, +\infty).$$

Επίσης,

$$F''(x) = -\frac{1 + 2x}{(x^2 + x + 1)^2}, \quad \forall x \in [0, +\infty).$$

Είναι $F''(x) < 0$ για $x > 0$ και $F''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ άρα η F είναι κοίλη παντού.

- 6 Καταρχάς, παρατηρούμε ότι το γράφημα της f αποτελεί παραβολή με κορυφή το σημείο $A(\frac{1}{2}, -1)$ στο οποίο λαμβάνει (ολικό) ελάχιστο και το γράφημα της g αποτελεί παραβολή με κορυφή το σημείο $O(0, 0)$ στο οποίο λαμβάνει (ολικό) μέγιστο.

(α) Υπολογίζουμε τα σημεία τομής των δυο καμπύλων: Είναι

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow (2x - 1)^2 = -x^2 \Leftrightarrow 5x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow 0 \Leftrightarrow x = 0, \frac{4}{5}$$

άρα, τα γραφήματα των f και g τέμνονται στα σημεία $(0, f(0)) = (0, 1)$ και $(\frac{4}{5}, f(\frac{4}{5})) = (\frac{4}{5}, -\frac{16}{25})$. επίσης,

¹ Δηλ. $\max_{x \in [0, 2\pi]} f(x) = 0$ και $\min_{x \in [0, 2\pi]} f(x) = 2\pi - 2\pi^2 - 1 < 0$

$$\begin{cases} f(x) - g(x) = 5x^2 - 4x + 1 \leq 0, \forall x \in \left[0, \frac{4}{5}\right] \\ f(x) - g(x) = 5x^2 - 4x + 1 \geq 0, \forall x \in \left[\frac{4}{5}, 1\right] \end{cases}$$

και $f(x) - g(x) = 0$ μόνο στα $x = 0, \frac{4}{5}$. Έτσι,

$$\begin{aligned} E &= \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx = \int_0^{\frac{4}{5}} (g(x) - f(x)) dx + \int_{\frac{4}{5}}^1 (f(x) - g(x)) dx = \int_0^{\frac{4}{5}} (4x - 5x^2) dx + \int_{\frac{4}{5}}^1 (5x^2 - 4x) dx \\ &= \frac{32}{75} + \frac{7}{75} = \frac{39}{75} \text{ τ. μ.} \end{aligned}$$

(β) Είμαι

$$V = \pi \int_0^{\frac{4}{5}} |f^2(x) - g^2(x)| dx$$

(γ) Είμαι $f(x) = (2x - 1)^2 - 1 = 4x^2 - 4x$ και αρα

$$\sum_{\kappa=1}^{\frac{\nu+1}{2}} (f(\kappa) + 2) + 4 \sum_{\kappa=1}^{\frac{\nu-1}{2}} g(\kappa) = \sum_{\kappa=1}^{\frac{\nu+1}{2}} (4\kappa^2 - 4\kappa) + \sum_{\kappa=1}^{\frac{\nu+1}{2}} 1 + 4 \sum_{\kappa=1}^{\frac{\nu-1}{2}} (-\kappa^2)$$

$$= 4 \sum_{\kappa=1}^{\frac{\nu+1}{2}} \kappa^2 - 4 \sum_{\kappa=1}^{\frac{\nu+1}{2}} \kappa + \frac{\nu+1}{2} - 4 \sum_{\kappa=1}^{\frac{\nu-1}{2}} \kappa^2 = 4 \left(\sum_{\kappa=1}^{\frac{\nu+1}{2}} \kappa^2 - \sum_{\kappa=1}^{\frac{\nu-1}{2}} \kappa^2 \right) + \frac{\nu+1}{2} - 4 \sum_{\kappa=1}^{\frac{\nu-1}{2}} \kappa$$

Αλλά,

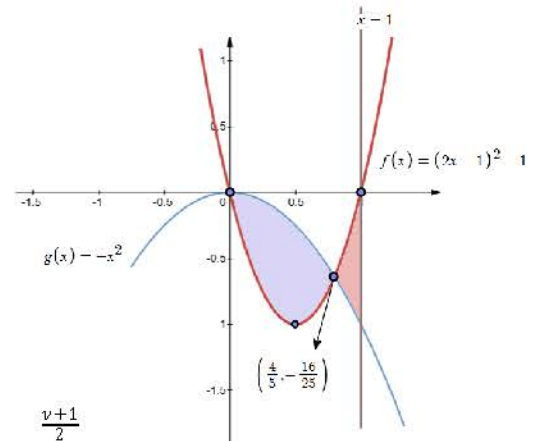
$$\sum_{\kappa=1}^{\frac{\nu+1}{2}} \kappa^2 - \sum_{\kappa=1}^{\frac{\nu-1}{2}} \kappa^2 = \left(\sum_{\kappa=1}^{\frac{\nu-1}{2}} \kappa^2 + \left(\frac{\nu+1}{2} \right)^2 \right) - \sum_{\kappa=1}^{\frac{\nu-1}{2}} \kappa^2 = \left(\frac{\nu+1}{2} \right)^2$$

και

$$\sum_{\kappa=1}^{\frac{\nu+1}{2}} \kappa = \frac{\frac{\nu+1}{2} \left(\frac{\nu+1}{2} + 1 \right)}{2} = \frac{(\nu+1)(\nu+3)}{8}$$

Έτσι,

$$\sum_{\kappa=1}^{\frac{\nu+1}{2}} (f(\kappa) + 1) + 4 \sum_{\kappa=1}^{\frac{\nu-1}{2}} g(\kappa) = 4 \frac{(\nu+1)^2}{4} + \frac{\nu+1}{2} - 4 \frac{(\nu+1)(\nu+3)}{8} = \frac{\nu(\nu+1)}{2} = \sum_{\kappa=1}^{\nu} \kappa$$



8 Για το $\int_0^{2020} f(2020 - x) dx = \int_0^{2020} f(2 \cdot 1010 - x) dx$, θεωρούμε το μετασχηματισμό $u(x) = 2020 - x$ και αρα

$$\int_0^{2020} f(2020 - x) dx = - \int_{2020}^0 f(u) du = \int_0^{2020} f(u) du \equiv \int_0^{2020} f(x) dx \quad (1)$$

Από υπόθεση, είναι

$$f(1010 - x) + f(1010 + x) = \frac{\alpha}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$$

και αρα

$$\int_{-1010}^{1010} f(1010 - x) dx + \int_{-1010}^{1010} f(1010 + x) dx = \int_{-1010}^{1010} \frac{\alpha}{2} dx$$

δηλ.

$$\int_{-1010}^{1010} f(1010 - x) dx + \int_{-1010}^{1010} f(1010 + x) dx = 2020 \frac{\alpha}{2} = 1010\alpha$$

$$\int_{-1010}^{1010} f(1010 - x) dx = - \int_{2020}^0 f(x) dx = \int_0^{2020} f(x) dx$$
$$\int_{-1010}^{1010} f(1010+x) dx = -\int_{2020}^0 f(2020-x) dx = \int_0^{2020} f(2020-x) dx \stackrel{(1)}{=} \int_0^{2020} f(x) dx$$
$$2 \int_0^{2020} f(x) dx = 1010\alpha$$
$$\int_0^{2020} f(x) dx = 505\alpha$$
$$\int_0^{2020} f(2020 - x) dx = \int_0^{2020} f(x) dx = 505\alpha$$
$$f(x) = \frac{3 + e^{1010-x}}{1 + e^{1010-x}}$$
$$\begin{aligned} f(1010 - x) + f(1010 + x) &= \frac{3 + e^{1010 - (1010 - x)}}{1 + e^{1010 - (1010 - x)}} + \frac{3 + e^{1010 - (1010 + x)}}{1 + e^{1010 - (1010 + x)}} \\ &= \frac{3 + e^x}{1 + e^x} + \frac{3 + e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \frac{3 + e^x}{1 + e^x} + \frac{e^x(3 + e^{-x})}{e^x(1 + e^{-x})} = \frac{3 + e^x}{1 + e^x} + \frac{(3e^x + 1)}{e^x + 1} = \frac{4 + 4e^x}{1 + e^x} = 4 \frac{1 + e^x}{1 + e^x} = 4 = \frac{8}{2} \end{aligned}$$
$$\int_0^{2020} \frac{3 + e^{1010-x}}{1 + e^{1010-x}} dx = 505 \cdot 4 = 2020$$

Από το εργαστήρι Μαθηματικών του κ. Ιωακείμ Ι.

