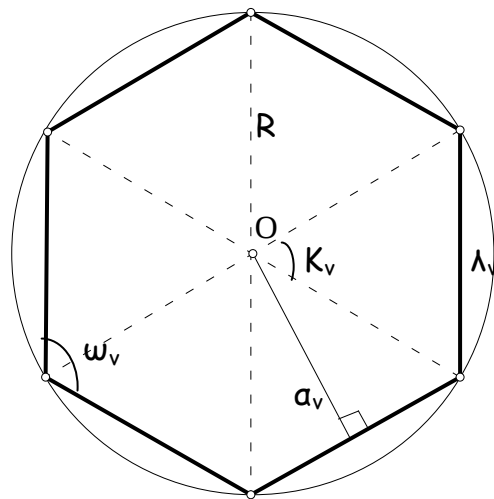


ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

Ορισμός: Κανονικό πολύγωνο λέγεται κάθε πολύγωνο που έχει όλες τις πλευρές τους ίσες και όλες τις γωνιές του ίσες.

π.χ.

Θεώρημα: Κάθε κανονικό πολύγωνο είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

Στοιχεία κανονικών πολυγώνων

1. Κέντρο (O) ενός κανονικού πολυγώνου λέγεται το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου.
2. Ακτίνα (R) ενός κανονικού πολυγώνου λέγεται κάθε ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου.
3. Πλευρά (λ_v) ενός κανονικού πολυγώνου λέγεται κάθε μια από τις ίσες πλευρές του
4. Απόστημα (α_v) ενός κανονικού πολυγώνου λέγεται η απόσταση του κέντρου O από κάθε πλευρά του
5. Κεντρική γωνιά (K_v) ενός κανονικού πολυγώνου λέγεται η γωνιά που σχηματίζουν δύο διαδοχικές ακτίνες του.

$$K_v = \dots\dots\dots$$
6. Γωνία κανονικού πολυγώνου (ω_v) ενός κανονικού πολυγώνου λέγεται η γωνιά που σχηματίζουν δύο διαδοχικές πλευρές του.

Το άθροισμα των γωνιών κάθε κυρτού ν-γώνου είναι $(n-2) \cdot 180^\circ \Rightarrow \omega_v = \dots\dots\dots$

Άρα

Για τα στοιχεία των κανονικών πολυγώνων ισχύουν οι εξής σχέσεις:

1) $(\frac{\lambda_v}{2})^2 + a_v^2 = R^2$

2) Η περίμετρος (Π_v) ενός κανονικού πολυγώνου δίνεται από την σχέση: $\Pi_v = n \cdot \lambda_v$

3) Το εμβαδόν (E_v) ενός κανονικού πολυγώνου δίνεται από την σχέση: $E_v = \frac{1}{2} \Pi_v \cdot a_v$

Εφαρμογές : 1) Να βρεθεί η κεντρική γωνιά και η γωνιά ενός κανονικού δεκαγώνου.

2) Ποιου κανονικού πολυγώνου η γωνιά του είναι 108° .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1) Να βρεθεί η κεντρική γωνιά και η γωνιά ενός κανονικού
α) πενταγώνου β) εξαγώνου γ) Δωδεκαγώνου

2) Ποιου κανονικού πολυγώνου η κεντρική γωνιά είναι: α) 36° β) 40° γ) 120°

3) Ποιου κανονικού πολυγώνου η γωνιά είναι: α) 144° β) 135° γ) 60°

4) Να εξετάσετε αν υπάρχει πολύγωνο που έχει:

α) $\omega_v = 140^\circ$

β) $\omega_v = 45^\circ$

γ) $K_v = 25^\circ$

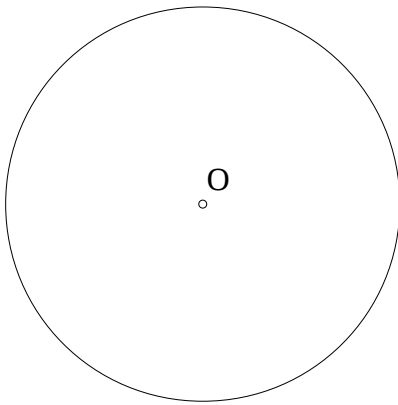
δ) $K_v = 40^\circ$

ΠΩΣ ΕΓΓΡΑΦΕΤΑΙ ΚΑΝΟΝΙΚΟ ΠΟΛΥΓΩΝΟ ΣΕ ΚΥΚΛΟ

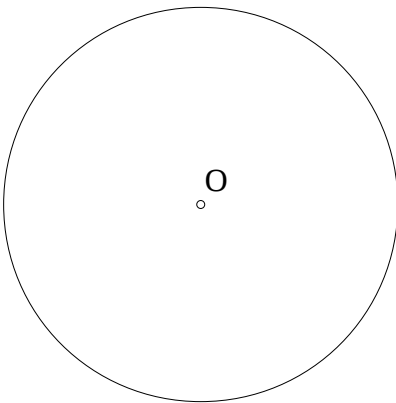
Θεώρημα : Αν ένας κύκλος διαιρεθεί σε n ίσα τόξα τότε τα σημεία διαιρέσεως είναι κορυφές κανονικού πολυγώνου.

Εγγραφή βασικών κανονικών πολυγώνων σε κύκλο και τα στοιχεία τους

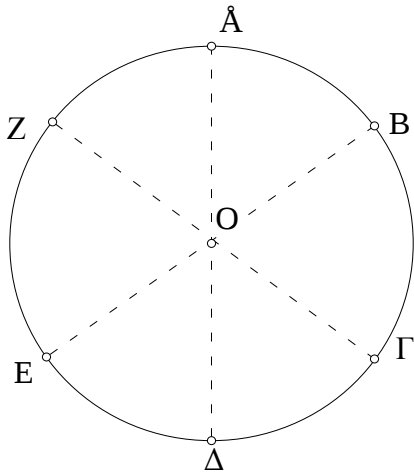
- **Τετράγωνο** : Για να εγγράψουμε ένα τετράγωνο σε κύκλο κέντρου O και ακτίνας R Φέρουμε δύο κάθετες διαμέτρους



- **Κανονικό Εξάγωνο** : Για να εγγράψουμε κανονικό εξάγωνο σε κύκλο κέντρου O και ακτίνας R , παίρνουμε πάνω στον κύκλο 6 διαδοχικά τόξα.



- **Ισόπλευρο τρίγωνο:** Για να εγγράψουμε ισόπλευρο τρίγωνο σε κύκλο κέντρου O και ακτίνας R , παίρνουμε πάνω στον κύκλο 6 διαδοχικά τόξα. Αν $A, B, \Gamma, \Delta, E, Z$ τα σημεία που διαιρούν τον κύκλο τότε τα σημεία A, Γ, E είναι οι κορυφές του ισόπλευρου τριγώνου.



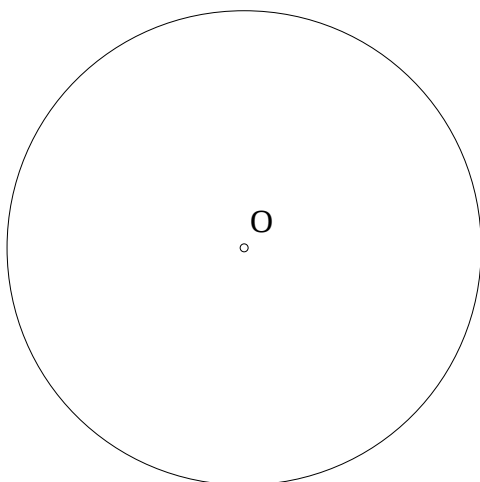
Συμπληρώστε τον πιο κάτω πίνακα

	<u>Τετράγωνο</u>	<u>Κανονικό εξάγωνο</u>	<u>Ισόπλευρο τρίγωνο</u>
<u>Πλευρά λ_v</u>			
<u>Απόστημα a_v</u>			
<u>Εμβαδόν E_v</u>			
<u>Περίμετρος Π_v</u>			

Εφαρμογές: 1) Αν $\Pi_4 = 8\sqrt{2} \text{ cm}$ να υπολογίσετε : R , E_4 , a_3 , E_6

- 2) Ισόπλευρο τρίγωνο και κανονικό εξάγωνο είναι εγγεγραμμένα στον ίδιο κύκλο. Αν τα εμβαδά τους διαφέρουν κατά $12\sqrt{3} \text{ cm}^2$, να βρεθεί η ακτίνα του κύκλου και το εμβαδόν του κύκλου.

- 3) Αν $AB=\lambda_4$, $BF=\lambda_6$ και $\Gamma\Delta=\lambda_4$ είναι τρεις διαδοχικές χορδές ενός κύκλου (O,R) , να υπολογίσετε, συναρτήσει του R , την περίμετρο και το εμβαδόν του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$.



Ασκήσεις για το σπίτι: Από το βιβλίο Ευκλείδεια Γεωμετρία:

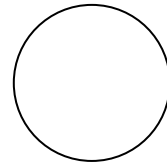
σελ 241,242 Ερωτήσεις Κατανόησης : 2, 3

Ερωτήσεις Εμπέδωσης : 2,4

Αποδεικτικές Ασκήσεις: 2

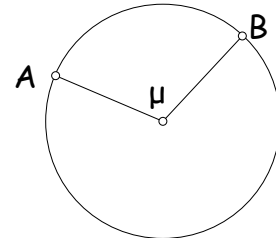
ΜΗΚΟΣ ΚΥΚΛΟΥ - ΜΗΚΟΣ ΤΟΞΟΥ

Το μήκος ενός κύκλου συμβολίζεται με Γ και δίνεται από τον τύπο $\Gamma = 2\pi R$ όπου $\pi = 3,14 = \frac{22}{7}$

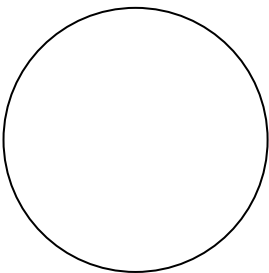


Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το μήκος ενός τόξου π.χ. του $\widehat{AB}$ αυτό δίνεται από τον τύπο:

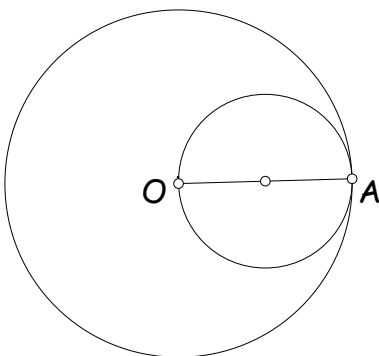
$$\gamma = \frac{2\pi R \mu^\circ}{360^\circ} \quad \text{όπου } \mu^\circ \text{ η αντίστοιχη επίκεντρη γωνία του τόξου } \widehat{AB}$$



Εφαρμογές: 1) Αν Α,Β,Γ διαδοχικά σημεία κύκλου (Ο, R), ώστε $AB = R\sqrt{2}$, $B\Gamma = R\sqrt{3}$ να βρείτε τα μήκη των τόξων $\widehat{AB}$, $\widehat{B\Gamma}$ και $\widehat{A\Gamma}$ συναρτήσει του R

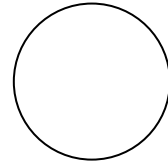


2) Με διάμετρο την ακτίνα ΟΑ ενός κύκλου (Ο, R) γράφουμε κύκλο (Κ) και από το Ο φέρουμε ημιευθεία που τέμνει τον κύκλο (Ο) στο Γ και τον κύκλο (Κ) στο Δ. Να δείξετε ότι τα τόξα $\widehat{A\Gamma}$ και $\widehat{A\Delta}$ έχουν ίσα μήκη.

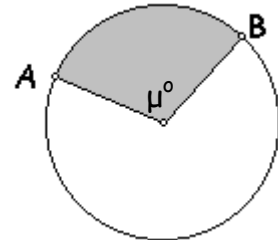


Εμβαδόν του κυκλικού δίσκου

Το εμβαδόν E ενός κυκλικού δίσκου ακτίνας R
δίνεται από τον τύπο : $E = \pi R^2$

Εμβαδόν κυκλικού τομέα

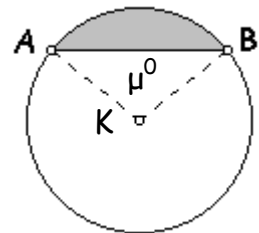
Ορισμός : Κυκλικός τομέας λέγεται το μέρος του κύκλικού δίσκου που περικλείεται από ένα τόξο κύκλου και τις ακτίνες στα άκρα του



Το εμβαδόν κυκλικού δίσκου 360° $E = \dots\dots\dots$
 Το εμβαδόν κυκλικού τομέα 1° $E = \dots\dots\dots$
 Το εμβαδόν κυκλικού τομέα μ° $E = \dots\dots\dots$

Εμβαδόν κυκλικού τμήματος

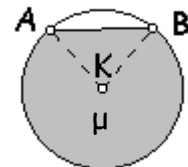
Ορισμός : Κυκλικό τμήμα λέγεται το μέρος του κυκλικού δίσκου που περικλείεται από μεταξύ ενός τόξου του κύκλου και της αντίστοιχης χορδής



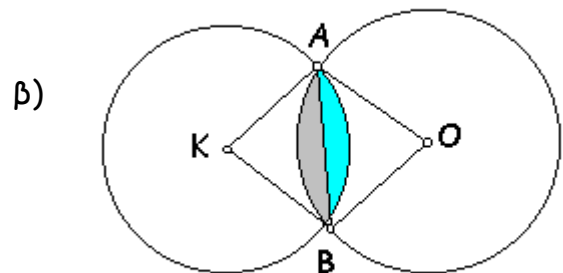
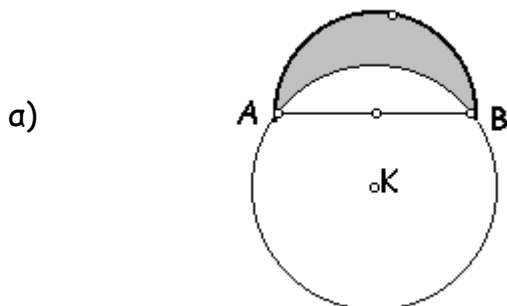
Το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος δίνεται από τη σχέση:

α) Αν $\mu < 180^\circ$ τότε $E_{\text{κ. τμήματος}} = E_{\text{κυκλ. τομέα}} - E_{\text{τριγώνου KAB}}$

β) Αν $\mu > 180^\circ$ τότε $E_{\text{κ. τμήματος}} = E_{\text{κυκλ. τομέα}} + E_{\text{τριγώνου KAB}}$

Μηνίσκος

Ορισμός : Μηνίσκος είναι το μέρος του επιπέδου που περικλείεται από δύο τόξα που έχουν κοινά άκρα και δεν ανήκουν στον ίδιο κύκλο

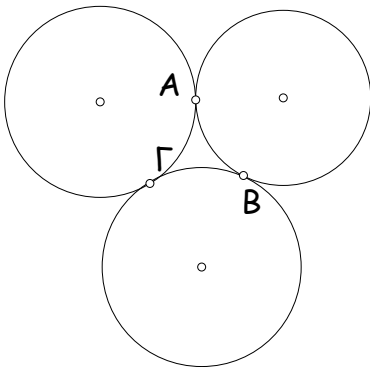


$E_{\text{μηνίσκου}} = \text{διαφορά κυκλικών τμημάτων}$

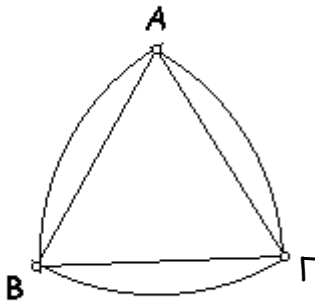
$E_{\text{μηνίσκου}} = \text{άθροισμα κυκλικών τμημάτων}$

Εφαρμογές : 1) Δίνεται κύκλος (O,R) και ισόπλευρο τρίγωνο εγγεγραμμένο σε αυτόν.
Να βρεθεί το εμβαδόν του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου

2) Τρεις ίσοι κύκλοι ακτίνας R εφάπτονται εξωτερικά ανά δύο στα σημεία A, B και Γ .
Να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου τριγώνου $AB\Gamma$,
συναρτήσει του R .

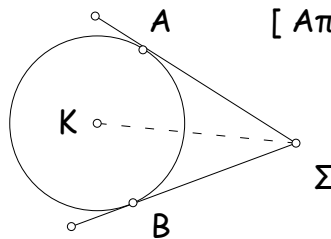


3) Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ πλευράς a . Γράφουμε τα τόξα των κύκλων (A,a) (B,a) και (Γ,a) που περιέχονται στις γωνίες $\hat{A}, \hat{B}, \hat{\Gamma}$ αντίστοιχα. Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του a την περίμετρο και το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου τριγώνου $AB\Gamma$



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

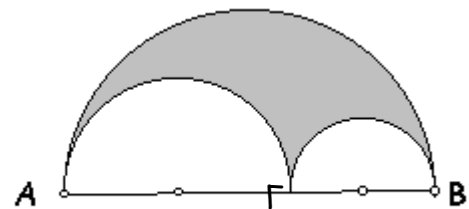
- 1) Οι τροχοί ενός αυτοκινήτου που έχουν διάμετρο 0,76m , έκαναν 25000 στροφές. Πόση απόσταση διάνυσε το αυτοκίνητο. (Απ: 59660 m)
- 2) Αν $AB = \lambda_4$ και $B\Gamma = \lambda_3$ είναι δυο διαδοχικές χορδές ενός κύκλου (O,R) να υπολογίσετε συναρτήσει του R , τη περίμετρο του μικτογράμμου τριγώνου που ορίζεται από τις χορδές AB και $B\Gamma$ και το τόξο $\widehat{AB}$ [Απ: $\Pi = \frac{R}{6}(6\sqrt{2}+6\sqrt{3}+5\pi)$]
- 3) Τα ΣA και ΣB είναι εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου (K,R) . Αν $(\Sigma K) = R\sqrt{2}$ να υπολογιστεί, συναρτήσει του R , η περίμετρος του μικτογράμμου τριγώνου ΣAB (δύο περιπτώσεις)



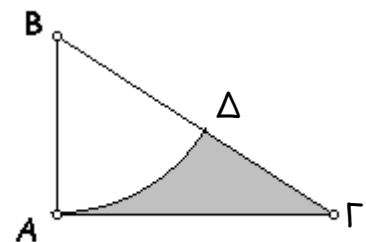
- 4) Πάνω σε μια ευθεία παίρνουμε διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα $AB, B\Gamma$ και $\Gamma\Delta$ και γράφουμε ημικύκλια με διαμέτρους τις AB , $B\Gamma$ και $\Gamma\Delta$. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των μηκών των ημικυκλίων αυτών είναι ίσο με το μήκος του ημικυκλίου που έχει διάμετρο $A\Delta$.
- 5) Δίνεται κύκλος (K) και τόξο $\widehat{AB} = 60^\circ$. Αν το τόξο $\widehat{AB}$ έχει μήκος 4π cm, να βρείτε το εμβαδόν του κύκλου. (Απ: $E = 144\pi \text{ cm}^2$)
- 6) Να βρεθεί το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου στα πιο κάτω σχήματα.

α) $(A\Gamma) = 12 \text{ cm}$ $(B\Gamma) = 8 \text{ cm}$

[Απ : $E = 24\pi \text{ cm}^2$]

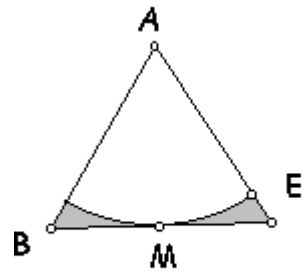


- β) Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο με $A=90^\circ$, $B=60^\circ$ και $(B\Gamma)=8 \text{ cm}$. Το τόξο $\widehat{A\Delta}$ γράφηκε με κέντρο το B. [Απ : $E = \frac{8}{3}(3\sqrt{3}-\pi) \text{ cm}^2$]

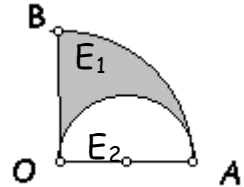


- γ) Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο και $(AB) = 4\text{cm}$.
Το τόξο $\widehat{ABE}$ γράφτηκε με κέντρο το A .

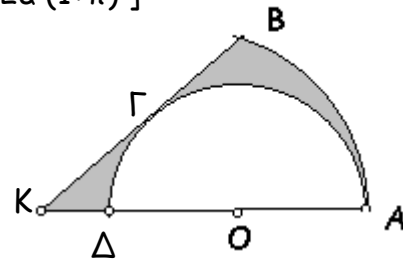
$$[A\pi : E = 2(2\sqrt{3} - \pi) \text{ cm}^2]$$



- 7) Δίνεται τεταρτοκύκλιο OAB με διάμετρο την ακτίνα OA γράφουμε ημικύκλιο μέσα στο τεταρτοκύκλιο.
Να δείξετε ότι $E_1 = E_2$



- 8) Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ με πλευρά ίση με $2a$. Με κέντρο το A και ακτίνα ίση με την πλευρά του γράφουμε το τόξο $\widehat{AB}$ μέσα στο τετράγωνο. Με διάμετρο την AB γράφουμε ημικύκλιο μέσα στο τετράγωνο. Να βρεθεί το εμβαδόν και η περίμετρος του μικτογράμμου τριγώνου $AB\Delta$. $[A\pi : E = \frac{a^2\pi}{2}, \Pi = 2a(1+\pi)]$



- 9) Στο σχήμα δίνεται ο κυκλικός τομέας KAB με γωνία $\hat{K} = 30^\circ$ με ακτίνα $6a$ και το ημικύκλιο κέντρου O που εφάπτεται της KB στο σημείο Γ .
Να βρεθούν: α) η ακτίνα του ημικυκλίου
β) το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου μέρους

$$[A\pi: \alpha) r=2a, \beta) E = \pi a^2]$$

- 10) Δίνεται κύκλος (O, R) και χορδή $AB = \lambda_3$. Με διάμετρο την AB γράφουμε ημικύκλιο έξω από τον κύκλο (O, R) . Να βρείτε συναρτήσει του R το εμβαδόν του μηνίσκου που ορίζεται από το μικρότερο ημικυκλίου τόξο $\widehat{AB}$ και από το ημικύκλιο με διάμετρο την AB .

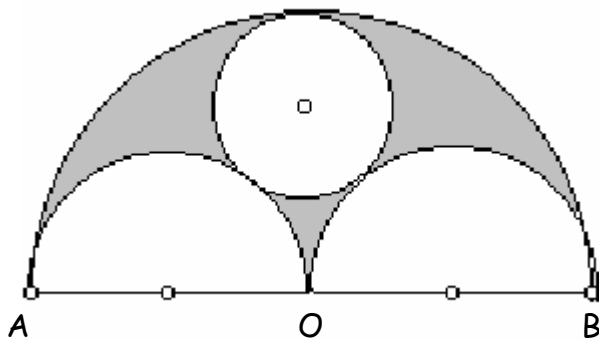
$$[A\pi: E = \frac{R^2}{24}(\pi + 6\sqrt{3})]$$

- 11) Σε κύκλο (O, R) παίρνουμε τόξο $\widehat{AB} = 60^\circ$. Φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου στο A και από το σημείο B φέρουμε την κάθετη $B\Gamma$ πάνω στην εφαπτομένη (Γ το σημείο τομής της κάθετης με την εφαπτομένη). Να υπολογιστεί συναρτήσει του R το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου $AB\Gamma$.

$$[A\pi: E = \frac{R^2}{24}(9\sqrt{3} - 4\pi)]$$

- 12) Δίνονται δυο ομόκεντροι κύκλοι και μια χορδή AB του μεγάλου κύκλου που εφάπτεται του μικρού. Να αποδειχτεί ότι το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου (δηλαδή το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των δυο ομόκεντρων κύκλων) ισούται με $\frac{\pi(AB)^2}{4}$

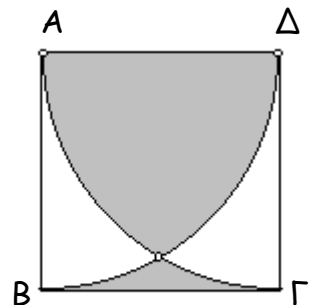
- 13) Δίνεται τετράγωνο με πλευρά ίση με $2a$. Με διαμέτρους τις πλευρές του γράφουμε ημικύκλια μέσα στο τετράγωνο. Να βρεθεί συνάρτηση του a , το εμβαδόν των τεσσάρων φύλλων που σχηματίζονται.
[Απ : $E = 2a^2 (\pi - 2)$]
- 14) Δυο ίσοι κύκλοι ακτίνας R έχουν διάκεντρο ίση με $R\sqrt{2}$. Να βρεθεί το εμβαδόν του κοινού μέρους τους.
[Απ : $E = \frac{R^2}{2} (\pi - 2)$]
- 15) Δίνεται κύκλος (O, R) και η ακτίνα του OA . Στην προέκταση της OA προς το A παίρνουμε σημείο B , ώστε $OA = AB$. Αν $B\Gamma$ είναι εφαπτόμενο τμήμα που άγεται από το B προς τον κύκλο, να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου $AB\Gamma$
[Απ: $\Pi = R(1 + \sqrt{3} + \frac{\pi}{3})$, $E = \frac{R^2}{6}(3\sqrt{3} - \pi)$]
- 16) Δίνεται ημικύκλιο (O, R) διαμέτρου AB . Με διαμέτρους τις AO και BO γράφουμε στο εσωτερικό του πρώτου ημικύκλια.
α) Να υπολογίσετε το μήκος του κύκλου, ο οποίος εφάπτεται των τριών ημικυκλίων, ως συνάρτηση του R .
β) Να βρείτε το εμβαδόν και την περίμετρο της σκιασμένης επιφάνειας



$$[\text{Απ : } \alpha) \Gamma = \frac{2\pi R}{3} \quad \beta) E = \frac{5\pi R^2}{36}, \Pi = \frac{8\pi R}{3}]$$

- 17) Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς a και τα τόξα $\widehat{AB}$ και $\widehat{A\Gamma}$ των κύκλων (A, a) και (Δ, a) αντίστοιχα. Να βρεθεί το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου μέρους του τετραγώνου.

$$[\text{Απ : } \frac{a^2}{6}(6 - 3\sqrt{3} + \pi)]$$



- 18) Δίνεται κύκλος (O, R) και ένα σημείο A αυτού. Με κέντρο το A και ακτίνα $R\sqrt{3}$ γράφουμε τόξο $B\Gamma$ μέσα στον κύκλο. Με κέντρο το A και ακτίνα $R\sqrt{2}$ να γράφουμε τόξο $ΕΔ$ μέσα στον κύκλο.

α) Να δείξετε ότι $\Delta E = 2R$

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου

μηνίσκου $B\Gamma\Delta E$.

$$[\text{Απ : } \frac{R^2}{6}(6 - 3\sqrt{3} + \pi)]$$

