

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α) $\psi = \frac{x-2}{x-5}$ β) $\psi = \frac{\sqrt{x^2-x-6}}{x^2-25}$ γ) $\psi = \sqrt{x^2-4} + \sqrt{x+1}$ δ) $\psi = \frac{\sqrt{|x|-3}}{\sqrt{9-|x|}}$

2) Να βρείτε το πεδίο τιμών των συναρτήσεων:

α) $\psi = \frac{x-2}{x-5}$ β) $\psi = \frac{4x}{x^2+16}$ γ) $\psi = \begin{cases} \frac{x-1}{x} & \text{αν } x \geq 1 \\ 2x-1 & \text{αν } x < 1 \end{cases}$ δ) $\psi = -2x+5 \quad x \in [-3,5)$

3) Να εξετάσετε αν ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση των συναρτήσεων από τους πιο κάτω τύπους. Αν ορίζεται η αντίστροφη να βρεθεί ο τύπος της και το πεδίο ορισμού της.

α) $\psi = \frac{3x-1}{x+6}$ β) $\psi = x^2 - 8x - 9 \quad x \in [4, \infty)$

4) Να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο είναι ίσες οι συναρτήσεις f και g .

α) $f(x) = \sqrt{x(x+2)}$, $g(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x+2}$ β) $f(x) = \sqrt{x^2-4x+4}$, $g(x) = 2-x$

5) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x^2+3x}{x^2-1}$, $g(x) = \frac{x}{x-1}$, $h(x) = \frac{x^2-1}{x^2+2x}$.

Να βρεθούν οι συναρτήσεις $f-g$, $\frac{f}{g}$, $g \cdot h$ και τα πεδία ορισμού τους.

6) Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $f(x) = \begin{cases} 2\alpha x + 3\beta & \text{αν } x \leq 1 \\ \alpha x + 2\beta & \text{αν } x > 1 \end{cases}$

α) Αν η γραφική παράσταση της πιο πάνω συνάρτησης είναι συνεχής και περνά από το σημείο $(-1, -5)$ να υπολογίσετε τις τιμές των α και β

β) Να γίνει η γραφική παράσταση της f

γ) Να εξηγήσετε γιατί ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της οποίας να βρείτε τον τύπο της και να γίνει η γραφική της παράσταση.

7) Δίνονται οι συναρτήσεις :

i) $f(x) = x+2$ και $g(x) = \sqrt{9-x^2}$ ii) $f(x) = \sqrt{x}+5$ και $g(x) = \sqrt{2-x}$

Να εξετάσετε αν ορίζονται οι συνθέσεις $f \circ g$ και $g \circ f$.

8) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 2x-5$ με πεδίο ορισμού $A=[3,8]$ και

$g(x) = \sqrt{x+1}$ με πεδίο ορισμού $B=[5,17]$. Να ορίσετε τις συνθέσεις $f \circ g$ και $g \circ f$.

9) Να εκφράσετε την $\psi = \eta\mu \sqrt{x-1}$ ως συνάρτηση τριών συναρτήσεων.

10) α) Να βρείτε την συνάρτηση g αν $f(x) = 4x-5$ και $(g \circ f)(x) = x^2 - 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

β) Να βρείτε την συνάρτηση g αν $f(x) = 4x-5$ και $(f \circ g)(x) = x^2 - 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Απαντήσεις: 1) α) $x \in \mathbb{R} - \{5\}$ β) $x \in (-\infty, -5) \cup (-5, -2] \cup [3, 5) \cup (5, \infty)$ γ) $x \in [2, \infty)$
 δ) $x \in (-9, -3] \cup [3, 9)$

2) α) $\psi \in \mathbb{R} - \{1\}$ β) $\psi \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ γ) $\psi \in (-\infty, 1)$ δ) $\psi \in (-5, 11]$

3) α) $f^{-1}(x) = \frac{1+6x}{3-x}$ $x \in \mathbb{R} - \{3\}$ β) $f^{-1}(x) = 4 + \sqrt{x+25}$ $x \in [-25, \infty)$

4) α) $[0, \infty)$ β) $(-\infty, 2]$

5) $(f \circ g)(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$ $x \in \mathbb{R} - \{\pm 1\}$

$(\frac{f}{g})(x) = \frac{x+3}{x+1}$ $x \in \mathbb{R} - \{\pm 1, 0\}$

$(g \circ h)(x) = \frac{x+1}{x+2}$ $x \in \mathbb{R} - \{-2, 0, 1\}$

6) $\alpha = 1, \beta = -1$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x+3}{2} & , x \leq -1 \\ x+2 & , x > -1 \end{cases}$$

7) α) $(f \circ g)(x) = \sqrt{9-x^2} + 2$ $x \in [-3, 3]$

$(g \circ f)(x) = \sqrt{-x^2 - 4x + 5}$ $x \in [-5, 1]$

β) $(f \circ g)(x) = \sqrt{\sqrt{2-x} + 5}$ $x \in (-\infty, 2]$

$(g \circ f)(x)$ δεν ορίζεται.

8) $(f \circ g)(x) = 2\sqrt{x+1} - 5$ $x \in [8, 17]$

$(g \circ f)(x) = \sqrt{2x-4}$ $x \in [5, 8]$

10) α) $f(x) = \frac{x^2 + 10x - 39}{16}$

β) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{4}$