

ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ: ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

1. Με χρήση της αντικατάστασης $x = -t$ να δείξετε ότι

$$\int_{-1}^1 \frac{x^2 e^x}{e^x + 1} dx = \int_{-1}^1 \frac{x^2}{e^x + 1} dx. \text{ Στη συνέχεια να δείξετε ότι } \int_{-1}^1 \frac{x^2 e^x}{e^x + 1} dx = \frac{1}{3}$$

2. Αν $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta \mu \chi}{1 + 2 \sigma \nu \nu \chi} dx$ και $B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta \mu^2 \chi}{1 + 2 \sigma \nu \nu \chi} dx$, να υπολογίσετε τα:

A, A+B και B.

3.α) Να δείξετε ότι $\int_0^\lambda x^3 f(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\lambda^2} x f(x) dx$.

β) Με τη βοήθεια του πιο πάνω αποτελέσματος ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο να βρείτε την τιμή του ολοκληρώματος $\int_0^2 x^3 e^{x^2} dx$.

4. Δίνεται η συνάρτηση f που είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και για την οποία ισχύει $f(a + \beta - x) = f(x)$ για $x \in R$.

α) Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $x = a + \beta - u$ να δείξετε ότι

$$\int_a^\beta x f(x) dx = \frac{a + \beta}{2} \int_a^\beta f(x) dx.$$

β) Με τη χρήση του πιο πάνω αποτελέσματος ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^\pi x \cdot \eta \mu^2 x dx$

5. Αν $\int_0^3 f(x) dx = 3$, $\int_0^6 f(x) dx = 6$ και $\int_0^9 f(x) dx = 9$, να βρείτε τα ολοκληρώματα :

$$\alpha) \int_6^0 2f(x) dx, \quad \beta) \int_3^6 f(\chi) d\chi, \quad \gamma) \int_6^9 f(x) dx \quad \delta) \int_0^{-1} f(-3x) dx$$

6. Έστω συνάρτηση f με τοπικό ακρότατο $(1, 0)$ και f'' συνεχής για την οποία ισχύει : $\int_0^1 (f(x) - f''(x)) \cdot e^x dx = 0$. Να δείξετε ότι $f(0) = f'(0)$

7. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 2\pi]$. Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $x = 2\pi - y$ Να δείξετε ότι :

$$\int_0^{2\pi} x \cdot f(\sin x) dx = \pi \int_0^{2\pi} f(\sin x) dx.$$

Με την βοήθεια της πιο πάνω σχέσης να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα :

$$\int_0^{2\pi} x \cdot \sin^2 x dx.$$

8. Δίνεται συνάρτηση $f(x)$ με συνεχή παράγωγο στο $[0, 1]$. Αν η $f(x)$

$$\text{ικανοποιεί τη σχέση } \int_0^1 x \cdot f'(x) dx = 2012 - \int_0^1 f(x) dx \text{ να βρείτε το } f(1).$$

9. Δίνεται μια συνεχής συνάρτηση $f(x)$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Να

$$\text{αποδείξετε ότι } \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_0^{\beta-\alpha} f(\alpha + x) dx.$$

$$10. \text{Να δείξετε ότι : } \int_0^{2\alpha} f(x) dx = \int_0^{\alpha} f(x) dx + \int_0^{\alpha} f(2\alpha - x) dx \quad (\alpha > 0)$$

11. Να βρείτε την ορισμένη στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ συνάρτηση f με συνεχή

δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύουν :

$$f(0) = 2012, \quad f'(0) = 1 \quad \text{και} \quad 1 + \int_0^x f''(t) \sin t dt = \sin^2 x + \int_0^x f'(t) \eta \mu t dt$$

12. Να υπολογίσετε τον θετικό πραγματικό αριθμό κ ώστε:

$$5 \int_1^{\kappa^2} \frac{(x+2)^2}{x^2+3} dx - \int_{\kappa}^1 \frac{4x}{x^2+3} dx + \int_{\kappa}^{\kappa^2} \frac{4x}{x^2+3} dx + \int_{\kappa^2}^1 \frac{24x+5}{x^2+3} dx = 40$$

13. Δίνονται τα ολοκληρώματα $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sigma\upsilon\nu^2 x + 2\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x + 1} dx$

$$B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\eta\mu^2 x + 2\eta\mu x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x + 1} dx.$$

α) Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $x = \frac{\pi}{2} - \psi$ να δείξετε ότι $A = B$.

β) Να υπολογίσετε το $A + B$ και το A .

14. Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$ για την οποία

$$3 \int_{-6}^{\kappa} \frac{x^2 + 6}{x^2 + 9} dx - 9 \int_{\kappa}^{-6} \frac{1}{x^2 + 9} dx = 24$$

15. Αν η συνάρτηση f έχει συνεχή παράγωγο f' και η γραφική της παράσταση περνά από τα σημεία $A(1,1)$ και $B(2,0)$, να υπολογίσετε το

ολοκλήρωμα : $I = \int_1^2 [f(x) + f'(x)] e^x dx$

16. Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ισχύει

$$f(x) = f(a + \beta - x)$$

i. Με χρήση της αντικατάστασης $x = a + \beta - u$ να δείξετε ότι

$$\int_a^{\beta} x f(x) dx = \frac{a + \beta}{2} \int_a^{\beta} f(x) dx$$

ii. Με την βοήθεια της πιο πάνω σχέσης να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\pi} \frac{x \eta\mu x}{3 + \sigma\upsilon\nu^2 x} dx$$

17. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ τότε :

α) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $u = c - x$ να δείξετε ότι

$$\int_a^{\beta} f(x) g(c - x) dx = \int_{c-\beta}^{c-a} f(c - x) g(x) dx$$

β) Στη συνέχεια να υπολογίσετε με τη βοήθεια των παραπάνω το

ολοκλήρωμα $A = \int_0^3 x^2 (2 - x)^7 dx$

18. Αν $I_\nu = \int_0^1 \frac{e^{\nu \cdot x}}{1 + e^x} dx$ τότε να δείξετε ότι $I_\nu + I_{\nu+1} = \frac{e^\nu - 1}{\nu}$

19. Δίνονται τα ολοκληρώματα :

$$A = \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x \sin v^2 \left(\frac{x^2}{2} \right) dx \quad \text{και} \quad B = \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x \eta \mu^2 \left(\frac{x^2}{2} \right) dx$$

Να υπολογίσετε τα $A+B$, $A-B$ και A .

20. Αν $\int_0^\pi f''(x) \cdot \sin x dx = 1 - \int_0^\pi \sin x \cdot f(x) dx$ και $f'(0) = -1$ να δείξετε ότι:
 $f'(\pi) = 0$

21. Να δείξετε ότι: $\int_{-2}^2 3 \cdot f(6-3x) dx = \int_0^{12} f(x) dx$

22. Δίνεται το $A = \int_{-2}^2 \frac{1}{(e^x + 1)(x^2 + 4)} dx$ και το $B = \int_{-2}^2 \frac{e^x}{(e^x + 1)(x^2 + 4)} dx$.

Με την αντικατάσταση $x = -y$, να δείξετε ότι $A = B$. Να βρείτε το $A+B$ και το A .

23. Η συνάρτηση $f(x)$ έχει σημεία καμπής $A(1, -2)$ και $B(3, 1)$ και η κλίση της εφαπτομένης της στα σημεία A και B είναι 2 και -3 αντίστοιχα. Να

υπολογίσετε το $\int_1^3 x f'''(x) dx$

24. Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$:

- i) Να αποδειχθεί ότι $\int_0^\pi xf(\eta\mu x)dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\eta\mu x)dx$ με χρήση του μετασχηματισμού $x=\pi-\gamma$.
- ii) Να αποδειχθεί ότι $\int_0^\pi f(\eta\mu x)dx = \left[\text{με τη χρήση της ιδιότητας: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\eta\mu x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi f(\eta\mu x)dx \right] = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\eta\mu x)dx$ με χρήση του μετασχηματισμού $x=\pi-\gamma$.
- iii) Να αποδειχθεί ότι $\int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}dx = \frac{a}{2}$ με χρήση του μετασχηματισμού $a-x=\gamma$.
- iv) Με τη βοήθεια των πιο πάνω ερωτημάτων να αποδείξετε ότι το ολοκλήρωμα
$$I = \int_0^\pi \frac{x\eta\mu^4 x}{\eta\mu^4 x + \sigma\upsilon\nu^4 x} dx = \frac{\pi^2}{4}$$