**ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ**

Οι παρακάτω ασκήσεις απευθύνονται σε μαθητές Γ’ Λυκείου που έχουν επιλεγμένο το μάθημα των Μαθηματικών Κατεύθυνσης. Είναι ασκήσεις που βασίζονται στις βασικές μεθόδους Συνδυαστικής Ανάλυσης **( Αρχή Απαρίθμησης, Μεταθέσεις, Κυκλικές Μεταθέσεις, Επαναληπτικές Μεταθέσεις, Διατάξεις και Συνδυασμοί)**. Θα χρειαστούμε σε κάποιες τον κλασσικό ορισμό των πιθανοτήτων $P\left(A\right)=\frac{ευνοικές περιπτώσεις}{συνολικές περιπτώσεις}=\frac{Ν(Α)}{Ν(Ω)}$ καθώς και κάποιες βασικές πράξεις μεταξύ Ενδεχομένων.

Σε αυτό το μπλοκ ασκήσεων επίσης υπάρχουν και όλες οι ασκήσεις των Παγκυπρίων εξετάσεων από το 2008 έως το 2014 Α και Β σειράς.

**Α. Αρχή της Απαρίθμησης**

1. Πόσοι τετραψήφιοι αριθμοί μπορούν να γίνουν με τα ψηφία 0, 1, 2, 3, 4, 5,αν δεν επιτρέπεται επανάληψη ψηφίων ; Πόσοι από αυτούς είναι περιττοί ;
2. Δίνονται τα ψηφία 3, 4, 5, 6 και 7. Πόσοι τριψήφιοι αριθμοί μπορούν να σχηματισθούν χρησιμοποιώντας αυτά τα ψηφία, αν δεν επιτρέπεται η επανάληψη ψηφίου; Πόσοι από αυτούς είναι περιττοί;
3. Δίνονται οι αριθμοί: 2, 0, 3, 4, 5, 7, 9. Αν δεν επιτρέπεται η επανάληψη ψηφίου, να υπολογίσετε:

 Α. Πόσοι τριψήφιοι σχηματίζονται;

 Β. Πόσοι άρτιοι τετραψήφιοι σχηματίζονται;

1. Με πόσους τρόπους κάποιος μπορεί να πάρει από ένα ράφι τουλάχιστον 1 μπάλα όταν έχει μπροστά του 3 άσπρες, 4 κόκκινες και 5 μπλε μπάλες;
2. Δίνονται τα ψηφία 1, 2, 4, 5, 7, 8, 9. Αν δεν επιτρέπεται επανάληψη ψηφίου να βρείτε: ,

 α) πόσοι τετραψήφιοι αριθμοί μπορούν να σχηματιστούν

 β) πόσοι τριψήφιοι αριθμοί μικρότεροι του 500 μπορούν να

 σχηματιστούν

 γ) πόσοι περιττοί τριψήφιοι αριθμοί μικρότεροι του 500 μπορούν να

 σχηματιστούν

1. Κατά πόσους τρόπους μπορούμε να κρεμάσουμε σε μια

 κρεμάστρα με 6 θέσεις 8 σακάκια;

1. Πόσοι διψήφιοι αριθμοί υπάρχουν;
2. Από τα ψηφία 1, 3, 5, 6, 7, 8 και χωρίς επανάληψη θά γίνουν τετραψήφιοι αριθμοί. Πόσοι από αυτούς θα είναι:

α) `Άρτιοι.

β) Μεγαλύτεροι του 8000.

γ) Μεγαλύτεροι του 8000 και άρτιοι.

δ) Μεγαλύτεροι του 8000 ή άρτιοι ή και τα δύο. 

**Β. Μεταθέσεις**

1. Δίνεται η λέξη ΤΡΑΠΕΖΙ. Να βρείτε:
2. Πόσοι αναγραμματισμοί υπάρχουν
3. Πόσοι απ αυτούς ξεκινούν με Τ
4. Πόσοι απ αυτούς τελειώνουν σε Ε
5. Πόσοι απ αυτούς ξεκινούν με Ζ και τελειώνουν με Α
6. Πόσοι απ αυτούς ξεκινούν με φωνήεν
7. Πόσοι απ αυτούς ξεκινούν με σύμφωνο
8. Πόσοι απ αυτούς έχουν τα φωνήεντα μαζί
9. Πόσοι απ αυτούς έχουν τα σύμφωνα μαζί
10. Πόσοι απ αυτούς δεν ξεκινούν με Ρ
11. Πόσοι απ αυτούς έχουν μέσα τους τη λέξη ‘ΑΕΙ’
12. Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης ‘ΠΛΗΘΟΣ’. Πόσοι απ αυτούς έχουν τα ΠΛ σε συνεχόμενες θέσεις;
13. Δίνεται η λέξη ‘ΘΑΛΗΣ’. Κάνουμε όλους τους δυνατούς αναγραμματισμούς της και τους γράφουμε (τους αναγραμματισμούς) σε ένα πρόγραμμα word. Ακολούθως ζητάμε από το πρόγραμμα να μας κατατάξει όλες τις λέξεις που βρήκαμε σε αλφαβητική σειρά. Ποια λέξη βα βρίσκεται στην 99η θέση.
14. Στο Γ1 ενός σχολείου φοιτούν 17 παιδιά. Τους βάζουμε να σταθούνε σε σειρά ο ένας πίσω από τον άλλο.
15. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει αυτό;
16. Σε πόσους απ αυτούς (τους τρόπους) 2 άτομα θα είναι διπλανοί;
17. Στο ένα δίκτυο υπολογιστών οι διευθύνσεις των συσκευών που το αποτελούν είναι 8-ψήφιοι αριθμοί. Το πρώτο ψηφίο δεν μπορεί να είναι 0 ή 1.

 (α) Πόσες διαθέσιμες διευθύνσεις έχει αυτό το δίκτυο;

 (β) Μια επιτροπή θρησκόληπτων προτείνει να απαγορευτούν όλες οι

 διευθύνσεις που ξεκινούν με τα ψηφία 666. Αν περάσει αυτό το σχέδιο

 πόσους διαθέσιμους αριθμούς θα χάσει το δίκτυο;

1. Τέσσερα παντρεμένα ζευγάρια έχουν αγοράσει οκτώ εισιτήρια θεάτρου που αντιστοιχούν σε οκτώ συνεχόμενες θέσεις της ίδιας σειράς. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να καθίσουν τα οκτώ άτομα στις θέσεις έτσι ώστε:
2. να μην υπάρχει κανένας περιορισμός για τη θέση που καταλαμβάνει το κάθε άτομο;
3. άντρες και γυναίκες να κάθονται εναλλάξ;
4. όλοι οι άνδρες να κάθονται σε 4 διαδοχικές θέσεις και όλες οι γυναίκες να κάθονται σε διαδοχικές θέσεις;
5. όλες οι γυναίκες να κάθονται σε διαδοχικές θέσεις;
6. Με πόσους τρόπους ,μπορούν να καθίσουν 5 ζευγάρια σε 10 καρέκλες σε μία σειρά; Εάν 1 ζευγάρι πρέπει να καθίσει σε διπλανά καθίσματα με πόσους τρόπους γίνεται αυτό; Εάν θα καθίσουν εναλλάξ άντρες γυναίκες ή γυναίκες άντρες; Εάν 2 συγκεκριμένοι άντρες δεν μπορούν να καθίσουν σε διπλανά καθίσματα;
7. Πάνω σε χαρτάκια γράφουμε όλους τους αναγραμματισμούς της λέξης ΨΥΓΕΙΟ. Πόσα χαρτάκια θα χρειαστούμε; Ας υποθέσουμε πως όλα τα πιο πάνω χαρτάκια τα βάζουμε σε ένα κουτί και ας υποθέσουμε πως τραβάμε ένα χαρτάκι στην τύχη. Να βρείτε τις πιθανότητες:
8. Να τραβήξουμε χαρτάκι που η λέξη του να ξεκινάει με σύμφωνο
9. Να τραβήξουμε χαρτάκι που η λέξη του να ξεκινάει με φωνήεν
10. Να τραβήξουμε χαρτάκι που η λέξη του να ξεκινάει με Υ
11. Να τραβήξουμε χαρτάκι που η λέξη του να έχει τα φωνήεντα μαζί
12. Να τραβήξουμε χαρτάκι που η λέξη του να έχει τα σύμφωνα μαζί
13. Να τραβήξουμε χαρτάκι που η λέξη του να μην έχει τα Ψ και Υ σε συνεχόμενες θέσεις
14. Να τραβήξουμε χαρτάκι που η λέξη του να ξεκινάει με Υ και να τελειώνει σε Ο
15. Να τραβήξουμε χαρτάκι που η λέξη του να έχει μαζί όλα τα φωνήεντα και όλα τα σύμφωνα
16. Εφτά μαθητές θα κάνουν διαγώνισμα στην ίδια αίθουσα. Οι 5 στην Φυσική και οι 2 στα Μαθηματικά. Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν σε σειρά ώστε οι 2 μαθητές των Μαθηματικών να μην είναι κοντινοί;

**Γ. Επαναληπτικές Μεταθέσεις – Κυκλικές Μεταθέσεις**

1. Δίνεται η λέξη ΚΑΡΕΚΛΑ
2. Πόσοι αναγραμματισμοί υπάρχουν;
3. Πόσοι απ αυτούς ξεκινούν με Κ
4. Πόσοι απ αυτούς έχουν τα φωνήεντα μαζί
5. Πόσοι ξεκινούν με φωνήεν
6. Πόσοι ξεκινούν με σύμφωνο
7. Πόσες πινακίδες αυτοκινήτων μπορούμε να κάνουμε με τα γράμματα Κ, Κ, Ρ και τα νούμερα 5, 5, 8 ;
8. Με τα νούμερα 1,1,1,2,2,3,4 πόσους εφταψήφιους και πόσους εξαψήφιους μπορούμε να κατασκευάσουμε;
9. Πόσοι διαφορετικοί τετραψήφιοι μπορούν να σχηματιστούν απο 4 τεσσάρια, 5 πεντάρια και 3 τριάρια;
10. Πόσες είναι οι μεταθέσεις των γραμμάτων της λέξης ΠΑΝΑΜΑΣ;
11. Πέντε άτομα με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν σε ένα κυκλικό τραπέζι;
12. Οχτώ άτομα με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν σε ένα κυκλικό τραπέζι αν 3 άτομα πρέπει να είναι διπλανοί;
13. Δίνεται η λέξη ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ. Πόσοι αναγραμματισμοί υπάρχουν και να βρείτε πόσοι ξεκινούν με Ε και δεν τελειώνουν σε Ε
14. Μία ομάδα συνέδρων αποτελείται από 5 Έλληνες, 4 Ρώσους, 6 Τούρκους, και 2 Ιταλούς. Κατά πόσους τρόπους μπορούν οι σύνεδροι αυτοί να καθίσουν έτσι ώστε τα μέλη κάθε εθνικότητας να βρίσκονται μαζί: α) στα καθίσματα μιας σειράς ενός αμφιθεάτρου και β) γύρω από ένα κυκλικό τραπέζι.
15. Κατά πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε τα στοιχεία του συνόλου Ω={1,2,3,4,α,β} σε μία γραμμή, έτσι ώστε τα γράμματα να είναι μαζί.(όμοια για κυκλική τοποθέτηση)
16. Δύο γυναίκες και τέσσερις άνδρες πρόκειται να καθίσουν σε μία σειρά, έτσι ώστε οι γυναίκες να μην κάθονται μαζί. Πόσοι τέτοιοι τρόποι υπάρχουν. Πόσοι τέτοιοι τρόποι υπάρχουν αν καθίσουν κυκλικά.
17. Ρίχνουμε ένα νόμισμα 7 φορές. Πόσοι τρόποι υπάρχουν για να εμφανισθούν α) 5 κεφαλές(Κ) και 2 γράμματα(Γ) ; β) το πολύ 2 κεφαλές;

**Δ. Διατάξεις – Συνδυασμοί**

1. Αν $ \left(\begin{matrix}ν\\ν-2\end{matrix}\right)=10$, να βρείτε το $ ν$.
2. Σε μια τάξη είναι 7 αγόρια και 4 κορίτσια.
3. Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε μια πενταμελή επιτροπή από το σύνολο των μαθητών της τάξης;
4. Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε μια επιτροπή από αυτά τα παιδιά που να αποτελείται από 3 αγόρια και 2 κορίτσια;

1. Σε μια ομάδα από 12 παιδιά τα 3 είναι κορίτσια και τα 9 αγόρια. Εκλέγουμε στην τύχη 4 παιδιά. Ποια είναι η πιθανότητα να πάρουμε:
	1. Τρία κορίτσια.
	2. Τουλάχιστον ένα κορίτσι.
	3. Κανένα κορίτσι
2. Ένας ηλεκτρολόγος έχει σ’ ένα συρτάρι 150 πυκνωτές , από τους οποίους 7 είναι ελαττωματικούς. Αν πάρει στη τύχη 5 πυκνωτές ποιά η πιθανότητα:

και οι πέντε να είναι ελαττωματικοί;

όλοι οι πυκνωτές που θα πάρει να λειτουργούν;

1. Σε μια ομάδα 4 ατόμων να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων.

 Α: έχουν γεννηθεί όλοι σε διαφορετικούς μήνες

Β: δυο τουλάχιστο έχουν γεννηθεί τον ίδιο μήνα.



1. Να αποδείξετε ότι
2. Σε έναν κύκλο δίνονται 8 σημεία A1, A2,..., A8. Πόσα ευθύγραμμα τμήματα ορίζουν τα σημεία αυτά; Ποια είναι η πιθανότητα ένα από τα παραπάνω τμήματα που επιλέγεται τυχαία να μη διέρχεται από το σημείο A1;
3. Από ένα σύλλογο καθηγητών με 7 άνδρες και 6 γυναίκες επιλέγουμε τυχαίως 4 άτομα. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:
i) τα άτομα να είναι γυναίκες
ii) ένα τουλάχιστον να είναι άνδρας
iii) να υπάρχει μία μόνο γυναίκα.
4. Δίνονται δύο παράλληλες ευθείες ε1 και ε2. Στην ε1 ορίζουμε 10 σημεία και στην ε2 20 σημεία. Πόσα τρίγωνα ορίζουν τα σημεία αυτά; Αν επιλέξουμε τυχαίως ένα τέτοιο τρίγωνο, ποια είναι η πιθανότητα να έχει μία πλευρά του στην ε1;
5. Από μια τάξη στην οποία φοιτούν 10 κορίτσια και 12 αγόρια επιλέγονται στην τύχη τρία άτομα για να εκπροσωπήσουν την τάξη. Να υπολογίσετε την πιθανότητα τα επιλεγμένα άτομα να είναι του ίδιου φύλου.
6. Να λυθεί η εξίσωση .
7. Οχτώ άτομα θα κάνουν μεταξύ τους χειραψία. Πόσες χειραψίες θα γίνουν;
8. Αν από ένα τραπέζι που κάθονται ορισμένα άτομα ακουστούν όταν τσουγκρίσουν τα ποτήρια τους ανά 2, 120 τσουγκρίσματα, πόσα άτομα είναι στο τραπέζι;
9. Να βρείτε το πλήθος των διαγωνίων του κανονικού 10-πλεύρου
10. Να βρεθούν οι συνδυασμοί τριών γραμμάτων από τα ΑΑΑΒΒΓΓΔ
11. Να βρεθούν οι λέξεις τριών γραμμάτων από τα ΑΑΑΒΒΓΓΔ
12. Σε ένα συνέδριο συμμετέχουν 5 Έλληνες, 7 Γάλλοι, 4 Άγγλοι και 5 Ρώσσοι. Με πόσους τρόπους μπορεί να σχηματιστεί μια τετραμελής επιτροπή με επιστήμονες διαφορετικής εθνικότητας;
13. Έστω ότι σε ένα διαγώνισμα πρέπει να απαντήσουμε σε 8 από τις 10 ερωτήσεις.

α) Πόσες επιλογές έχουμε;

 β) Πόσες επιλογές έχουμε αν πρέπει να απαντήσουμε υποχρεωτικά

 στις τρεις πρώτες ερωτήσεις;

 γ) Πόσες επιλογές έχουμε αν πρέπει να απαντήσουμε

 τουλάχιστον στις 4 από τις 5πρώτες ερωτήσεις;