



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
«Ευαγόρας Παλληκαρίδης»

Α' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ημερομηνία: 16/12/06

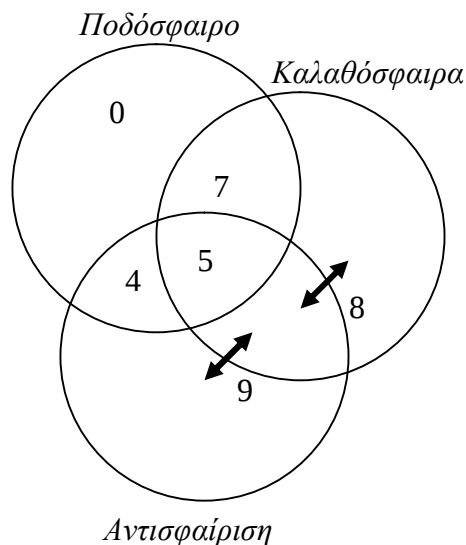
Ωρα εξέτασης: 09:30 -12:30

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

1. Ζητήθηκε από τους 30 μαθητές μιας τάξης να επιλέξουν τουλάχιστον ένα από τα αθλήματα: ποδόσφαιρο, αντισφαίριση και καλαθόσφαιρα για το μάθημα της φυσικής αγωγής, υπό την προϋπόθεση ότι κανένας δεν θα επιλέξει μόνο ποδόσφαιρο. Πέντε μαθητές επέλεξαν καλαθόσφαιρα, ποδόσφαιρο και αντισφαίριση. Εννέα μαθητές επέλεξαν ποδόσφαιρο και αντισφαίριση. Δεκαοκτώ μαθητές επέλεξαν αντισφαίριση. Από τους είκοσι μαθητές που επέλεξαν καλαθόσφαιρα, οι δώδεκα επέλεξαν επίσης ποδόσφαιρο. Πόσοι μαθητές επέλεξαν αντισφαίριση και καλαθόσφαιρα;

ΛΥΣΗ

Σύμφωνα με τα δεδομένα της άσκησης κατασκευάζουμε το πιο κάτω διάγραμμα:

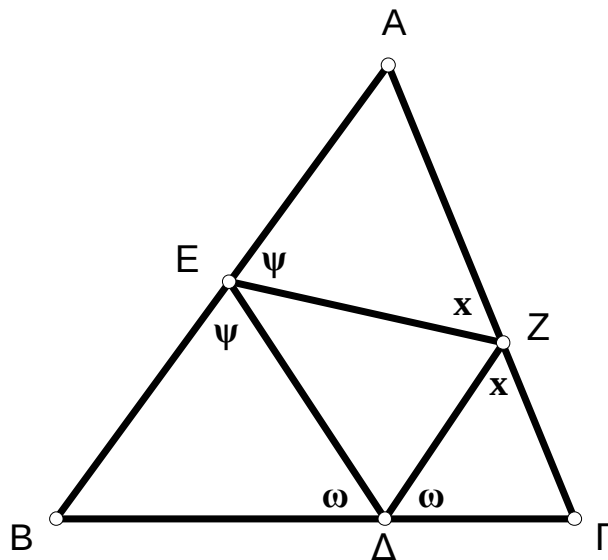


Μόνο αντισφαίριση έχουν επιλέξει $30 - (4 + 5 + 7 + 8) = 6$ μαθητές.

Άρα οι μαθητές που έχουν Καλαθόσφαιρα και αντισφαίριση μόνο είναι $(9 - 6) + 5 = 3 + 5 = 8$.

2. Στο πιο κάτω σχήμα είναι $\hat{A}\hat{Z}E = \hat{\Gamma}\hat{Z}\Delta$, $\hat{A}\hat{E}Z = \hat{\Delta}\hat{E}B$ και $\hat{B}\hat{\Delta}E = \hat{\Gamma}\hat{\Delta}Z$. Να αποδείξετε ότι $\hat{B}\hat{\Delta}E = \hat{E}\hat{A}Z$.

ΛΥΣΗ



Ονομάζουμε τις γωνίες όπως φαίνεται στο σχήμα .

$$\left. \begin{array}{l} \hat{\Delta}\hat{E}Z = 180^\circ - 2\psi \\ \hat{E}\hat{\Delta}Z = 180^\circ - 2\omega \\ \hat{E}\hat{Z}\Delta = 180^\circ - 2x \\ \hat{\Delta}\hat{E}Z + \hat{E}\hat{\Delta}Z + \hat{E}\hat{Z}\Delta = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow 180^\circ - 2\psi + 180^\circ - 2\omega + 180^\circ - 2x = 180^\circ \Rightarrow 360^\circ - 2(x + \psi + \omega) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x + \psi + \omega = 180^\circ} \quad (1)$$

Στο $\hat{A}\hat{E}Z$ έχω $\hat{E}\hat{A}Z + \hat{A}\hat{Z}E + \hat{Z}\hat{E}A = 180^\circ \Rightarrow \boxed{x + \psi + \hat{E}\hat{A}Z = 180^\circ} \quad (2)$

Από (1) και (2) έχουμε $\boxed{\hat{E}\hat{A}Z = \omega = \hat{B}\hat{\Delta}E}$.

3. Ένας τριψήφιος αριθμός διαιρείται με το 3. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των ψηφίων του επίσης διαιρείται με το 3.

ΛΥΣΗ

Έστω α ο τριψήφιος αριθμός και $3/\alpha$.

Τότε $\boxed{\alpha = 100x + 10\psi + z}$ με x είναι το ψηφίο των εκατοντάδων του, ψ των δεκάδων και z των μονάδων.

Άρα αρκεί να δείξουμε ότι $3 / (x + \psi + z)$.

$$\alpha = 100x + 10\psi + z = (99+1)x + (9+1)\psi + z = 99x + x + 9\psi + \psi + z = 9(10x + \psi) + (x + \psi + z)$$

και τελικά $\boxed{(x + \psi + z) = \alpha - 9(10x + \psi)}$

όμως $3 / 9(10x + 3\psi)$ και $3 / \alpha$ άρα θα διαιρεί και την διαφορά τους.

Συνεπώς $3 / (x + \psi + z)$.

4. Να βρείτε όλους τους τριψηφίους φυσικούς αριθμούς οι οποίοι όταν διαιρεθούν με το 5, 7 και 11 αφήνουν υπόλοιπο 2.

ΛΥΣΗ

$$\text{Έστω } a \text{ ένας τέτοιος αριθμός. Τότε θα έχουμε: } \left. \begin{array}{l} a = 5x + 2 \\ a = 7y + 2 \\ a = 11z + 2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} a - 2 = 5x \\ a - 2 = 7y \\ a - 2 = 11z \end{array} \right\} \text{ που}$$

σημαίνει ότι ο αριθμός $(a - 2)$ είναι κοινό πολλαπλάσιο των 5, 7, 11 και άρα

πολλαπλάσιο του ΕΚΠ(5, 7, 11) = 385.

Έτσι $a - 2 = 385$, $a - 2 = 770$, $a - 2 = 1155$, ...

Τελικά $a = 387$, $a = 772$

5. Να βρείτε πόσοι φυσικοί αριθμοί υπάρχουν ανάμεσα στους αριθμούς 1 και 9999 οι οποίοι δεν έχουν δύο ίδια ψηφία συνεχόμενα.

ΛΥΣΗ

Μονοψήφιοι: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (εκτός 0) $\Rightarrow$ 8 αριθμούς.

Διψήφιοι:

Πρώτο ψηφίο	Δεύτερο ψηφίο	Πλήθος αριθμών
1	Όλα εκτός το 1	9
2	Όλα εκτός το 2	9
3	Όλα εκτός το 3	9
4	Όλα εκτός το 4	9
5	Όλα εκτός το 5	9
6	Όλα εκτός το 6	9
7	Όλα εκτός το 7	9
8	Όλα εκτός το 8	9
9	Όλα εκτός το 9	9

$\Rightarrow 9 \cdot 9 = \underline{81}$ αριθμούς

Ομοίως,

Τριψήφιοι: $9 \cdot 9 \cdot 9 = \underline{729}$ αριθμούς

Τετραψήφιοι: $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = \underline{6561}$ αριθμούς

Άρα συνολικά έχουμε $8 + 81 + 729 + 6561 = \underline{7379}$ αριθμούς.