



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

Α' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ημερομηνία: 18/12/2010

Ωρα εξέτασης: 09:30 -12:30

Προτεινόμενες λύσεις

1. Σε μια κατασκήνωση υπάρχουν 18 παιδιά και έχουν τρόφιμα για 9 μέρες. Μετά από 5 μέρες έρχονται στην κατασκήνωση ακόμη 6 παιδιά. Σε πόσες μέρες θα τελειώσουν τα τρόφιμα που έχουν;

Λύση:

Μόλις ήλθαν τα 6 παιδιά , οι τροφές που έχουν αρκούν για 4 μέρες για τα 18 παιδιά.

Άρα 18 παιδιά έχουν τροφή για 4 μέρες

24 παιδιά έχουν τροφή για x μέρες

$$x = 4 \cdot \frac{18}{24} = 3 \text{ μέρες} .$$

2. (α) Αν $a = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2009} + \frac{1}{2010}$,

$$\beta = 1 + \frac{2}{4} + \frac{4}{6} + \frac{6}{8} + \dots + \frac{4016}{4018} + \frac{4018}{4020}.$$
 να υπολογίσετε τον μέσο όρο

των α και β .

Λύση:

$$\begin{aligned} a + \beta &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2009} + \frac{1}{2010}\right) + \left(1 + \frac{2}{4} + \frac{4}{6} + \frac{6}{8} + \dots + \frac{4016}{4018} + \frac{4018}{4020}\right) = \\ &= (1+1) + \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{6}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{6}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2009} + \frac{4016}{4018}\right) + \left(\frac{1}{2010} + \frac{4018}{4020}\right) = \\ &= (1+1) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2009} + \frac{2008}{2009}\right) + \left(\frac{1}{2010} + \frac{2009}{2010}\right) = \\ &= 2 + 1 + 1 + 1 + \dots + 1 + 1 = 2 + 2009 = 2011 \end{aligned}$$

Άρα $(1+1) + \frac{a+\beta}{2} = \frac{2011}{2} = 1005\frac{1}{2}$

(β) Να βρεθεί το τελευταίο ψηφίο του αριθμού $A = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 99^2$

Λύση:

$1^2 = 1$	$11^2 = 121$	...	$91^2 = 8281$
$2^2 = 4$	$12^2 = 144$	...	$92^2 = 8464$
$3^2 = 9$	$13^2 = 169$	...	$93^2 = 8649$
$4^2 = 16$	$14^2 = 196$	...	$94^2 = 8836$
$5^2 = 25$	$15^2 = 225$	...	$95^2 = 9025$
$6^2 = 36$	$16^2 = 256$	...	$96^2 = 9216$
$7^2 = 49$	$17^2 = 289$	...	$97^2 = 9409$
$8^2 = 64$	$18^2 = 324$	...	$98^2 = 9604$
$9^2 = 81$	$19^2 = 361$	...	$99^2 = 9801$
$10^2 = 100$	$20^2 = 400$		

Παρατηρούμε ότι το τελευταίο ψηφίο του αριθμού της κάθε στήλης είναι:

1, 4, 9, 6, 5, 4, 9, 6, 1 και παρουσιάζονται 10 φορές.

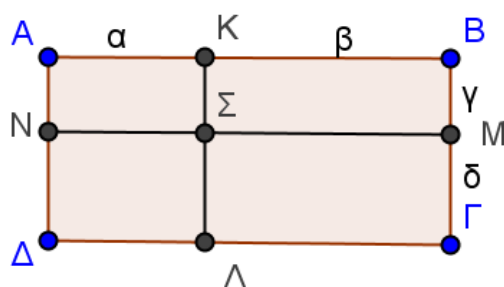
Το 0 παρουσιάζεται 9 φορές. Άρα το άθροισμα των ψηφίων των μονάδων του

αριθμού είναι: $10 \cdot (1 + 4 + 9 + 5 + 9 + 4 + 1) + 9 \cdot 0 = 330$

Δηλαδή το τελευταίο ψηφίο του αριθμού είναι το 0.

3. Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ διαιρείται σε τέσσερα μικρότερα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με δυο ευθείες παράλληλες προς τις πλευρές του. Τα τρία απ' αυτά τα τέσσερα ορθογώνια έχουν εμβαδά 10, 18, 25 cm² αντίστοιχα. Να βρεθεί το εμβαδόν του τέταρτου ορθογωνίου.

Λύση:



$$E_{AKΣN} = 10 \text{ cm}^2 \Rightarrow \alpha \cdot \gamma = 10 \quad (1)$$

$$E_{KBΜΣ} = 18 \text{ cm}^2 \Rightarrow \beta \cdot \gamma = 18 \quad (2)$$

$$E_{NΣΛΔ} = 25 \text{ cm}^2 \Rightarrow \alpha \cdot \delta = 25 \quad (3)$$

$$\text{Από τις (1) και (2) παίρνουμε } \frac{\alpha \cdot \gamma}{\beta \cdot \delta} = \frac{10}{18} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{5}{9} \Rightarrow \alpha = \frac{5}{9} \beta$$

$$\text{Αντικαθιστούμε στη (3)} \quad \frac{5}{9} \beta \cdot \delta = 25 \Rightarrow \beta \cdot \delta = 45 \Rightarrow$$

$$E_{ΣΜΓΛ} = 45 \text{ cm}^2$$

$$E_{ABΓΔ} = E_{AKΣN} + E_{KBΜΣ} + E_{NΣΛΔ} + E_{ΣΜΓΛ} = 10 + 18 + 25 + 45 = 98 \text{ cm}^2$$

4. Ένας πολιτικός μηχανικός και ο βοηθός του ανέλαβαν τη μελέτη ενός έργου από το οποίο εισέπραξαν 24912ευρώ. Ο πολιτικός μηχανικός θα απασχοληθεί για 42 μέρες και ο βοηθός του για 45 μέρες. Η ημερήσια αμοιβή του πολιτικού μηχανικού είναι κατά 40% μεγαλύτερη της ημερήσιας αμοιβής του βοηθός του. Πόσα χρήματα θα εισπράξει ο καθένας στο τέλος της μελέτης;

Λύση:

Η αμοιβή του πολιτικού μηχανικού είναι ίση με το $\frac{100}{100} + \frac{40}{100} = \frac{140}{100}$ τις εκατό

της αμοιβής του βοηθού του, οπότε τα 42 ημερομίσθια του πολιτικού

μηχανικού ισοδυναμούν με $42 \cdot \frac{140}{100} = \frac{588}{10}$ ημερομίσθια του βοηθού του.

Ο βοηθός παίρνει 45 ημερομίσθια και οι δυο μαζί παίρνουν

$$\frac{588}{10} + 45 = \frac{1038}{10} \text{ ημερομίσθια.}$$

Το ημερομίσθιο του βοηθού είναι $24912 \div \frac{1038}{10} = 240 \text{ €}$ και του πολιτικού

μηχανικού είναι $240 \cdot \frac{140}{100} = 336 \text{ €}$.

Άρα ο πολιτικός μηχανικός θα πάρει συνολικά 14112€ και ο βοηθός του θα πάρει $240 \cdot 45 = 10800 \text{ €}$.