



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

«Ευαγόρας Παλληκαρίδης»

ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2011

Α' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

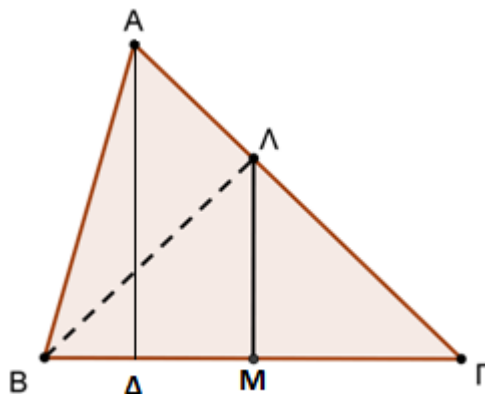
Ημερομηνία: 10/12/2011 Ώρα εξέτασης: 9:30 -12:30

ΟΔΗΓΙΕΣ:

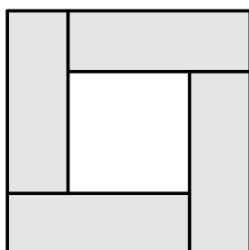
1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως της απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΘΕΜΑΤΑ

1. (α) Στο διπλανό σχήμα $ΜΛ \perp ΒΓ$ και Μ μέσο της $ΒΓ$. Δίνονται, $ΜΓ = 5\text{ cm}$, $Μ\hat{Λ}Γ = 45^\circ$, $A\hat{B}\Lambda = 30^\circ$ και εμβαδό του τριγώνου $E(AB\Gamma) = 35\text{ cm}^2$. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ και το ύψος $ΑΔ$ του τριγώνου $AB\Gamma$.



- (β) Τέσσερα ίσα ορθογώνια και ένα τετράγωνο τοποθετούνται (χωρίς να επικαλύπτονται) για να δημιουργήσουν ένα άλλο τετράγωνο όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Αν το κάθε ορθογώνιο έχει περίμετρο 40cm να βρείτε το εμβαδόν του μεγάλου τετραγώνου.



Λύση:

(α) Αφού $ΜΛ$ μεσοκάθετη στη $ΒΓ$ θα είναι $ΒΛ=ΓΛ$ και $ΛΜ$ διχοτόμος της γωνίας $ΒΛΓ$. Κατά συνέπεια γωνία $ΒΛΓ$ ορθή.

Επομένως $\hat{\Gamma} = 45^\circ$, $\hat{B} = 45^\circ + 30^\circ = 75^\circ$ και $\hat{A} = 180^\circ - 45^\circ - 75^\circ = 60^\circ$.

Το ύψος $AD = \frac{2E(ABF)}{BF} = \frac{2 \cdot 35}{10} = 7 \text{ cm}$.

(β) Από το σχήμα φαίνεται ότι η πλευρά του μεγάλου τετραγώνου είναι ίση με το μισό της περιμέτρου ενός ορθογωνίου. Κατά συνέπεια το εμβαδό του μεγάλου τετραγώνου είναι $20^2 = 400 \text{ cm}^2$.

2. Ένα έργο μπορεί να τελειώσει σε 30 ημέρες αν ο Άρης και ο Πάρης εργάζονται συγχρόνως. Το έργο ξεκίνησε και μετά από 6 ημέρες που εργάζονταν και οι δυο μαζί, ο Άρης εγκατέλειψε και ο Πάρης χρειάζεται ακόμη 40 μέρες για να τελειώσει το έργο. Να βρείτε πόσες μέρες θα χρειαζόταν ο καθένας για να τελειώσει το έργο από μόνος του.

Λύση

Ας είναι x αντίστοιχα y το μέρος του έργου που συμπληρώνει ο Άρης αντίστοιχα ο Πάρης σε μια μέρα. Τότε έχουμε

$$30x + 30y = 1 \text{ και } 6x + 6y + 40y = 1$$

Δηλαδή

$$30x + 30y = 1 \text{ και}$$

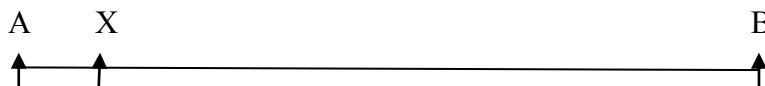
$$6x + 46y = 1$$

Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε $x = 1/75$, $y = 1/50$

Οπότε ο Άρης χρειάζεται 75 μέρες από μόνος του και ο Πάρης 50 μέρες.

3. Ο Λάκης τρέχει με το ποδήλατο από το σημείο Α προς το σημείο Β ενώ ο Τάκης με αυτοκίνητο από το σημείο Β στο σημείο Α, ο καθένας με σταθερή ταχύτητα και στον ίδιο δρόμο. Ξεκινούν την ίδια στιγμή και αφού συναντηθούν, ο Λάκης κάνει 25 φορές περισσότερο χρόνο για να συμπληρώσει τη διαδρομή από ότι ο Τάκης. Να βρείτε τον λόγο της ταχύτητας του ποδηλάτου προς την ταχύτητα του αυτοκινήτου.

Λύση:



Ας είναι X το σημείο συνάντησής τους. Τότε ο χρόνος που χρειάζεται ο Λάκης για να καλύψει την απόσταση XB είναι 25 φορές το χρόνο που χρειάζεται ο Τάκης για να καλύψει την απόσταση XA . Επίσης ο χρόνος που χρειάζεται ο Λάκης για να καλύψει την απόσταση AX είναι ο ίδιος με αυτόν που χρειάζεται ο Τάκης για να καλύψει την απόσταση BX . Αν λοιπόν π η ταχύτητα του ποδηλάτου και α η ταχύτητα του αυτοκινήτου θα έχουμε

$$\frac{AX}{\pi} = \frac{BX}{\alpha} \text{ και } \frac{XB}{\pi} = 25 \frac{XA}{\alpha}$$

Κατά συνέπεια έχουμε $\frac{AX}{BX} = \frac{\pi}{\alpha}$ και $\frac{AX}{BX} = \frac{\alpha}{25\pi}$

Επομένως $\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 = 25$ και άρα $\frac{\alpha}{\pi} = 5$

4. Να βρείτε το ψηφίο των μονάδων του πιο κάτω αθροίσματος:

$$23^{2011} + 37^{2011} + 64^{2011} + 88^{2011} =$$

Λύση:

Βλέπουμε ότι οι δυνάμεις του 23 έχουν ψηφίο των μονάδων που αντιστοιχεί στην ακολουθία 3,9,7,1,3,9,7,1,... . Αλλά $2011=502\cdot 4+3$. Κατά συνέπεια ο πρώτος προσθετέος στο υπό μελέτη άθροισμα έχει ψηφίο μονάδων το 7.

Με τον ίδιο τρόπο για το 37 έχουμε την ακολουθία 7,9,3,1,7,9,3,1,... και το ψηφίο των μονάδων στο δεύτερο προσθετέο το 3.

Για το 64 έχουμε την ακολουθία 4,6,4,6,..., το $2011=1005\cdot 2+1$ και ψηφίο των μονάδων του τρίτου προσθετέου το 4.

Για το 88 έχουμε την ακολουθία 8,4,2,6,8,4,2,6,... το $2011=502\cdot 4+3$ και ως εκ τούτου ψηφίο των μονάδων στον τέταρτο προσθετέο το 2

Κατά συνέπεια, προσθέτοντας τα ψηφία των μονάδων των τεσσάρων προσθετέων έχουμε $7+3+4+2=16$, οπότε το ψηφίο των μονάδων στο δοθέν άθροισμα είναι το 6.