



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

Α' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ημερομηνία: 06/12/2014

Ώρα εξέτασης: 09:30 -12:30

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Πρόβλημα 1: Να προσδιορίσετε τα σύνολα A και B , που ικανοποιούν τις παρακάτω ιδιότητες:

(α) $A \cup B = \{1, 8, 9, 22, 2014, 2015\}$

(β) $A \cap B = \emptyset$

(γ) Το σύνολο A περιέχει δυο άρτιους

(δ) $1 \in A$ και $8 \notin A$

(ε) $n(A) = n(B)$

Λύση

Λόγω των (α), (β), (δ) είναι $1 \in A$ και $8 \in B$. Επιπλέον, λόγω των (γ), (ε) έχουμε ότι $A = \{1, 22, 2014\}$ και $B = \{8, 9, 2015\}$.

Πρόβλημα 2: Να βρείτε τον εξαψήφιο αριθμό $A = \overline{3xy97z}$, αν γνωρίζετε ότι ο A διαιρείται με τον 2475.

Λύση

Έχουμε: $2475 = 9 \cdot 11 \cdot 25$

Ο A είναι πολλαπλάσιο του 25, άρα $z = 5$.

Ο A είναι πολλαπλάσιο του 9, άρα $3 + x + y + 9 + 7 + 5 = x + y + 24 = \text{πολλ}9$

Επειδή τα x, y είναι ψηφία, οι μόνες περιπτώσεις είναι: $x + y + 24 = 27$ (♠) ή $x + y + 24 = 36$ (♦).

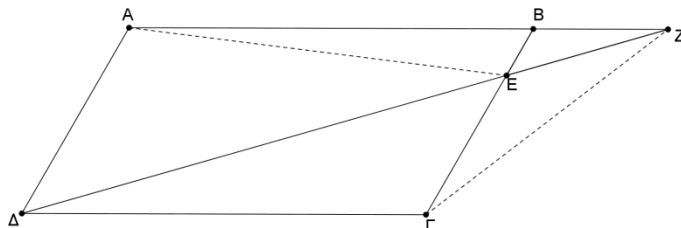
Ο A είναι πολλαπλάσιο του 11, συνεπώς $3 - x + y - 9 + 7 - 5 = y - x - 4 = \text{πολλ}11$.

Επειδή τα x, y είναι ψηφία, η μόνη περίπτωση είναι: $y - x - 4 = 0 \Leftrightarrow y = x + 4$ (*)

Συνδυάζοντας τώρα την (*) με τις (♠) και (♦), παίρνουμε ως μοναδική δεκτή λύση την $x = 4, y = 8$. Άρα ο αριθμός είναι $A = 348975$.

Πρόβλημα 3: Στην πλευρά $BΓ$ παραλληλογράμμου $ΑΒΓΔ$ παίρνουμε σημείο E , τέτοιο ώστε $(ΕΓ) = 3(ΒΕ)$. Αν η ευθεία $ΔΕ$ τέμνει την προέκταση της πλευράς $ΑΒ$ στο σημείο Z , να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $ΒΕΖ$ ισούται με το $\frac{1}{24}$ του εμβαδού του παραλληλογράμμου $ΑΒΓΔ$.

Λύση



Φέρνουμε τα $ΑΕ, ΓΖ$ και συμβολίζουμε $\mathcal{E}$ το εμβαδόν του παραλληλογράμμου $ΑΒΓΔ$ και ε το εμβαδόν του τριγώνου $ΔΒΕΖ$. Τότε

$$(ΑΕΔ) = (ΑΕΒ) + (ΔΕΓ) = (ΔΖΓ) = (ΓΕΖ) + (ΔΕΓ) = \frac{1}{2} \mathcal{E}.$$

$$\text{Άρα } (ΑΕΒ) = (ΓΕΖ) = 3\varepsilon.$$

$$\text{Επίσης, } (ΔΕΓ) = 3(ΑΕΒ) = 3 \cdot 3\varepsilon = 9\varepsilon.$$

$$\text{Τελικά, } 3\varepsilon + 9\varepsilon = \frac{1}{2} \mathcal{E} \Rightarrow 12\varepsilon = \frac{1}{2} \mathcal{E} \Rightarrow \varepsilon = \frac{1}{24} \mathcal{E}.$$

Πρόβλημα 4: Να αποδείξετε ότι σε κάθε έτος υπάρχει τουλάχιστον μια Τρίτη και 13.

Λύση

- Αν η χρονιά δεν είναι δίσεκτη

Έστω ότι 13 Ιανουαρίου είναι ημέρα X . Τότε:

13 Φεβρουαρίου θα είναι ημέρα $X + 3$ (μετά από 4 εβδομάδες και 3 ημέρες).

13 Μαρτίου θα είναι και πάλι ημέρα $X + 3$ (μετά από 4 εβδομάδες και 0 ημέρες)

13 Απριλίου θα είναι ημέρα $X + 6$ (μετά από 4 εβδομάδες και 3 ημέρες)

13 Μαΐου θα είναι ημέρα $X + 8 \rightarrow X + 1$

13 Ιουνίου θα είναι ημέρα $X + 4$

13 Ιουλίου θα είναι ημέρα $X + 6$

13 Αυγούστου θα είναι ημέρα $X + 9 \rightarrow X + 2$

13 Σεπτεμβρίου θα είναι ημέρα $X + 5$

13 Οκτωβρίου θα είναι ημέρα $X + 7 \rightarrow X$

13 Νοεμβρίου θα είναι ημέρα $X + 3$

13 Δεκεμβρίου θα είναι ημέρα $X + 5$

- Αν η χρονιά είναι δίσεκτη

Έστω ότι 13 Ιανουαρίου είναι ημέρα X . Τότε:

- 13 Φεβρουαρίου θα είναι ημέρα $X + 3$ (μετά από 4 εβδομάδες και 3 ημέρες).
- 13 Μαρτίου θα είναι και πάλι ημέρα $X + 4$ (μετά από 4 εβδομάδες και 1 ημέρα)
- 13 Απριλίου θα είναι ημέρα $X + 7 \rightarrow X$ (μετά από 4 εβδομάδες και 3 ημέρες)
- 13 Μαΐου θα είναι ημέρα $X + 2$
- 13 Ιουνίου θα είναι ημέρα $X + 5$
- 13 Ιουλίου θα είναι ημέρα $X + 7 \rightarrow X$
- 13 Αυγούστου θα είναι ημέρα $X + 3$
- 13 Σεπτεμβρίου θα είναι ημέρα $X + 6$
- 13 Οκτωβρίου θα είναι ημέρα $X + 8 \rightarrow X + 1$
- 13 Νοεμβρίου θα είναι ημέρα $X + 4$
- 13 Δεκεμβρίου θα είναι ημέρα $X + 6$

Και στις δυο περιπτώσεις υπάρχουν όλες οι ημέρες:

$X, X + 1, X + 2, X + 3, X + 4, X + 5, X + 6$ και συνεπώς μια τουλάχιστον ημέρα του έτους είναι Τρίτη και 13.