



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2016

Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ημερομηνία: 10/12/2016

Ώρα Εξέτασης: 09:30-12:30

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε όλους τους τετραψήφιους αριθμούς που ικανοποιούν τις πιο κάτω συνθήκες:

- Όλα τα ψηφία τους είναι πρώτοι αριθμοί.
- Είναι πολλαπλάσια του 36.

Προτεινόμενη Λύση

Από την πρώτη συνθήκη προκύπτει ότι τα ψηφία των ζητούμενων αριθμών ανήκουν στο σύνολο $A = \{2, 3, 5, 7\}$.

Αφού $36 = 4 \cdot 9$ και οι αριθμοί 4, 9 είναι πρώτοι μεταξύ τους, η δεύτερη συνθήκη είναι ισοδύναμη με το να βρούμε τους τετραψήφιους αριθμούς που διαιρούνται με το 4 και το 9.

Από το κριτήριο διαιρετότητας του 4, συμπεραίνουμε ότι οι ζητούμενοι αριθμοί τελειώνουν σε 32, 52 ή 72.

Αν x, y είναι το ψηφίο των χιλιάδων και το ψηφίο των εκατοντάδων των ζητούμενων αριθμών, αντίστοιχα, τότε:

$$x, y \in A \text{ και } x + y \leq 14$$

Διακρίνουμε τις ακόλουθες τρεις περιπτώσεις:

- Αριθμοί που τελειώνουν σε 32
Από το κριτήριο διαιρετότητας του 9 προκύπτει ότι $9 \mid x + y + 5$. Άρα:
 - $x + y = 4 \Rightarrow x = y = 2$, που δίνει τον αριθμό **2232**
 - $x + y = 13$, που δεν έχει λύσεις στο A
- Αριθμοί που τελειώνουν σε 52
Από το κριτήριο διαιρετότητας του 9 προκύπτει ότι $9 \mid x + y + 7$. Άρα:
 - $x + y = 2$, που δεν έχει λύσεις στο A
 - $x + y = 11$, που δεν έχει λύσεις στο A
- Αριθμοί που τελειώνουν σε 72
Από το κριτήριο διαιρετότητας του 9 προκύπτει ότι $9 \mid x + y + 9$. Άρα:
 - $x + y = 9 \Rightarrow x = 2, y = 7$, που δίνει τον αριθμό **2772**
 - $x + y = 9 \Rightarrow x = 7, y = 2$, που δίνει τον αριθμό **7272**

Πρόβλημα 2

Αν a, β, γ και δ είναι τέσσερεις **διαφορετικοί** αριθμοί από το σύνολο

$$A = \left\{-10, -7, -\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{4}, 1, 2, 8\right\},$$

να υπολογίσετε τη **μέγιστη** και την **ελάχιστη θετική** τιμή που μπορεί να πάρει η παράσταση:

$$B = \frac{a + \beta}{\gamma - \delta}$$

Προτεινόμενη Λύση

Η μέγιστη θετική τιμή της παράστασης B λαμβάνεται με έναν από τους πιο κάτω τρόπους:

- Ο αριθμητής $a + \beta$ να είναι ο μεγαλύτερος θετικός αριθμός που προκύπτει και ο παρονομαστής $\gamma - \delta$ να είναι ο μικρότερος θετικός αριθμός που προκύπτει με αριθμούς μέσα από το σύνολο A . Δηλαδή:

$$a + \beta = 8 + 2 = 10, \quad \gamma - \delta = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}, \quad B = \frac{10}{\frac{1}{4}} = 40$$

- Ο αριθμητής $a + \beta$ να είναι ο μικρότερος αρνητικός αριθμός που προκύπτει και ο παρονομαστής $\gamma - \delta$ να είναι ο μεγαλύτερος αρνητικός αριθμός που προκύπτει με αριθμούς μέσα από το σύνολο A . Δηλαδή:

$$a + \beta = -10 - 7 = -17, \quad \gamma - \delta = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}, \quad B = \frac{-17}{-\frac{1}{4}} = 68$$

Επομένως, η μέγιστη θετική τιμή της παράστασης B είναι $B_{max} = 68$.

Η ελάχιστη θετική τιμή της παράστασης B λαμβάνεται με έναν από τους πιο κάτω τρόπους:

- Ο αριθμητής $a + \beta$ να είναι ο μικρότερος θετικός αριθμός που προκύπτει και ο παρονομαστής $\gamma - \delta$ να είναι ο μεγαλύτερος θετικός αριθμός που προκύπτει με αριθμούς μέσα από το σύνολο A . Δηλαδή:

$$a + \beta = -\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{1}{4}, \quad \gamma - \delta = 8 - (-10) = 18, \quad B = \frac{\frac{1}{4}}{18} = \frac{1}{72}$$

- Ο αριθμητής $a + \beta$ να είναι ο μεγαλύτερος αρνητικός αριθμός που προκύπτει και ο παρονομαστής $\gamma - \delta$ να είναι ο μικρότερος αρνητικός αριθμός που προκύπτει με αριθμούς μέσα από το σύνολο A . Δηλαδή:

$$a + \beta = -\frac{1}{2} + 0 = -\frac{1}{2}, \quad \gamma - \delta = -10 - 8 = -18, \quad B = \frac{-\frac{1}{2}}{-18} = \frac{1}{36}$$

Επομένως, η ελάχιστη θετική τιμή της παράστασης B είναι $B_{min} = \frac{1}{72}$.

Πρόβλημα 3

Τρεις φίλοι αγόρασαν από μια μοτοσικλέτα A, B και Γ . Για την εξόφληση των μοτοσικλετών, ο πωλητής ζήτησε από τον καθένα να του δώσει αρχικά μια προκαταβολή και στη συνέχεια να πληρώνει μια συγκεκριμένη δόση κάθε μήνα. Οι τρεις φίλοι έδωσαν το ίδιο ποσό χρημάτων για προκαταβολή και θα πληρώνουν την ίδια μηνιαία δόση. Το ποσό της μηνιαίας δόσης είναι ακέραιος αριθμός μεγαλύτερος από €100. Αν το συνολικό κόστος των μοτοσικλετών είναι €3000 για την A , €3315 για την B και €3840 για την Γ , να υπολογίσετε το ποσό της μηνιαίας δόσης.

Προτεινόμενη Λύση

Θέτουμε x το ποσό που δόθηκε για προκαταβολή και y το ποσό της μηνιαίας δόσης, όπου x, y θετικοί ακέραιοι αριθμοί, $y > 100$.

Έχουμε:

$$\begin{cases} y \mid 3000 - x & (1) \\ y \mid 3315 - x & (2) \\ y \mid 3840 - x & (3) \end{cases}$$

Από τις (1) και (2) παίρνουμε:

$$y \mid (3315 - x) - (3000 - x) \Rightarrow y \mid 315 \quad (4)$$

Από τις (1) και (3) παίρνουμε:

$$y \mid (3840 - x) - (3000 - x) \Rightarrow y \mid 840 \quad (5)$$

Από τις (4) και (5) συμπεραίνουμε ότι ο y διαιρεί τον μέγιστο κοινό διαιρέτη των 315 και 525.

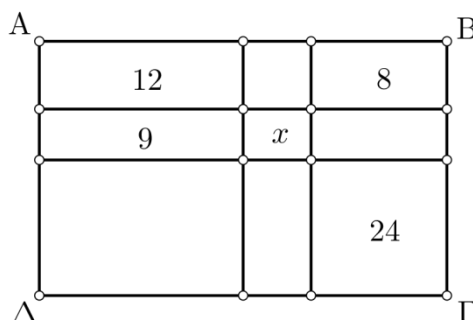
Έχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} 315 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \\ 525 = 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \end{array} \right\} \Rightarrow MKΔ(315, 525) = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$$

Τελικά, συμπεραίνουμε ότι αφού ο y διαιρεί τον 105 και $y > 100$, τότε $y = 105$.

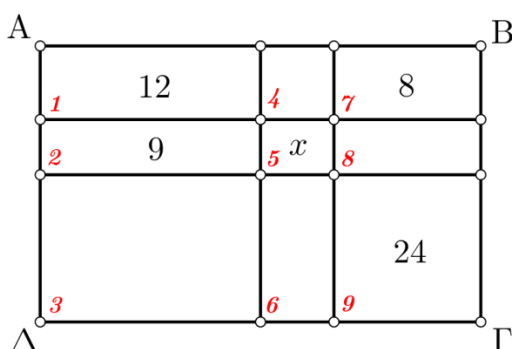
Πρόβλημα 4

Στο διπλανό σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με εμβαδόν 114 cm^2 , το οποίο χωρίστηκε σε 9 μικρότερα ορθογώνια παραλληλόγραμμα. Αν οι αριθμοί 8, 9, x , 12 και 24 αντιπροσωπεύουν τα εμβαδά των αντίστοιχων ορθογωνίων παραλληλογράμμων σε cm^2 , να υπολογίσετε την τιμή του x .



Προτεινόμενη Λύση

Αριθμούμε 1, 2, 3, ..., 9 τα «μικρά» ορθογώνια παραλληλόγραμμα, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.



Ονομάζουμε $E_1, E_2, \dots, E_9$ τα εμβαδά των αντίστοιχων ορθογωνίων παραλληλογράμμων.

Τα 7 και 9 έχουν το ίδιο μήκος και $E_9 = 3E_7$. Τα 1 και 3 έχουν το ίδιο μήκος. Επιπλέον, έχουν τα ίδια πλάτη με τα 7 και 9, αντίστοιχα. Άρα, $E_3 = 3E_1 = 3 \cdot 12 = 36 \text{ cm}^2$.

Ομοίως:

- Αφού $E_2 = \frac{3}{4}E_1$, τότε $E_8 = \frac{3}{4}E_7$. Δηλαδή, $E_8 = 6 \text{ cm}^2$.
- $E_9 = 4 \cdot E_8 \Rightarrow E_6 = 4 \cdot E_5 = 4x$
- $E_9 = 3 \cdot E_7 \Rightarrow E_6 = 3 \cdot E_4 \Rightarrow E_4 = \frac{4}{3}x$

Το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ είναι 114 cm^2 . Έχουμε:

$$\begin{aligned} 12 + 9 + 36 + \frac{4}{3}x + x + 4x + 8 + 6 + 24 &= 114 \Rightarrow \frac{19}{3}x + 95 = 114 \\ &\Rightarrow \frac{19}{3}x = 19 \Rightarrow x = 3 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$