



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2019

Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ημερομηνία: 21/12/2019

Ωρα Εξέτασης: 09:30-12:30

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Πρόβλημα 1

Στο σχεδιάγραμμα φαίνεται ένα ορθογώνιο με περίμετρο 372cm του οποίου το μήκος και το πλάτος είναι φυσικοί αριθμοί πρώτοι μεταξύ τους. Το ορθογώνιο αποτελείται από 9 τετράγωνα πλακάκια διαφορετικού μεγέθους με μήκος πλευράς κκάθε τετραγώνου να είναι ακέραιος αριθμός. Το ορθογώνιο θα καλυφθεί με τετράγωνα πλακάκια που έχουν μέγεθος ίδιο με το μικρότερο πλακάκι του σχήματος. Πόσα τέτοια πλακάκια θα χρειαστούν;

Λύση:

Έστω $AB=x$ και $AD=DE=EG=y$

$BD=BP=AD=AB+AD=x+y$

$ZP=PH=HP=HZ=BP+BZ=(x+y)+x=2x+y$

$KM=OL=KO=ML=OP+PL=(2x+y)+(x+y)=3x+2y$

$EN=KH=KO+OH=(3x+2y)+(2x+y)=5x+3y$

$MN=ME=PE=NF=ML+LD+DE=(3x+2y)+(x+y)+y=4x+4y$

$PT=PF=PE+EG=(4x+4y)+y=4x+5y$

Διαστάσεις EN και NT

$EN= EN+KM+MN=(5x+3y)+(3x+2y)+(4x+4y)=12x+9y$

$NT=NF+PT=(4x+4y)+(4x+5y)=8x+9y$

Περίμετρος $= 2(EN)+2(NT)=2(12x+9y)+2(8x+9y)=40x+36y$

$40x+36y=372$

$10x+9y=93$

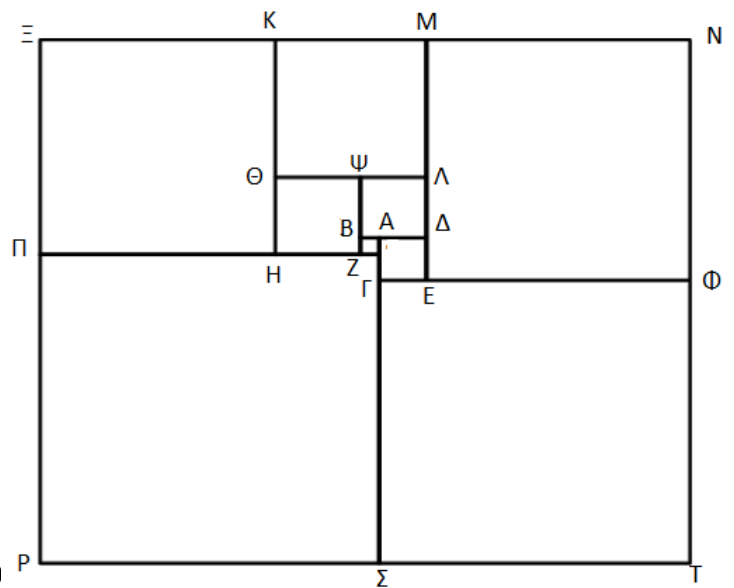
$x=3, y=7$

$EN=99, NT=87$

Μικρότερο τετράγωνο μήκους 3

$(99/3)(87/3) = 33 \cdot 29 = 957$

Θα χρειαστούν 957 πλακάκια



Πρόβλημα 2

Σε ένα διεθνές συνέδριο Μαθηματικών οι σύνεδροι μπορούν να παρακολουθήσουν διαλέξεις σε τρεις ενότητες των Μαθηματικών. Γνωρίζουμε ότι 40 σύνεδροι παρακολουθήσαν Άλγεβρα, 50 σύνεδροι παρακολούθησαν Γεωμετρία και 70 σύνεδροι Στατιστική. Επίσης γνωρίζουμε ότι οι 20 σύνεδροι παρακολούθησαν Άλγεβρα και Γεωμετρία, 25 σύνεδροι παρακολούθησαν Γεωμετρία και Στατιστική, ενώ 17 σύνεδροι παρακολούθησαν Άλγεβρα και Στατιστική. Αν 111 σύνεδροι παρακολούθησαν τουλάχιστον μια ενότητα από αυτές, πόσοι παρακολούθησαν και τις τρεις ενότητες.

Λύση:

Άλγεβρα $N(A)=40$, Γεωμετρία $N(\Gamma)=50$, Στατιστική $N(\Sigma)=70$

$$N(A \cap \Gamma) = 20$$

$$N(\Gamma \cap \Sigma) = 25$$

$$N(A \cap \Sigma) = 17$$

Έστω X ο αριθμός των συνέδρων που παρακολούθησε και τις τρεις διαλέξεις

$$N(A \cap \Gamma \cap \Sigma) = X$$

α' τρόπος

$$N(\Omega) = N(A) + N(\Gamma) + N(\Sigma) - N(A \cap \Gamma) - N(\Gamma \cap \Sigma) - N(A \cap \Sigma) + N(A \cap \Gamma \cap \Sigma)$$

$$111 = 40 + 50 + 70 - 20 - 25 - 17 + X$$

$$X = 13$$

Απ.:13 σύνεδροι παρακολούθησαν και τις τρεις ενότητες

β' τρόπος

$20 - X$ Παρακολούθησαν Άλγεβρα και Γεωμετρία αλλά όχι Στατιστική

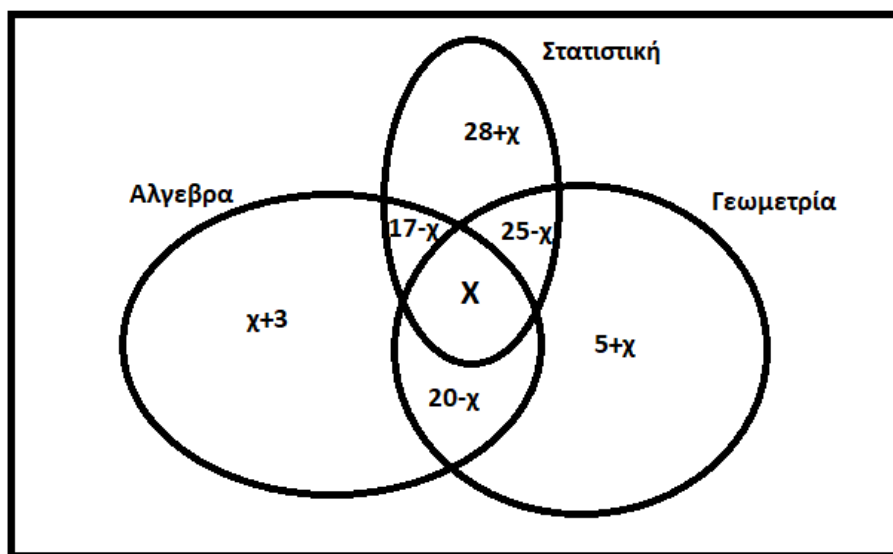
$25 - X$ παρακολούθησαν Γεωμετρία και Στατιστική αλλά όχι Άλγεβρα

$17 - X$ παρακολούθησαν Άλγεβρα και Στατιστική αλλά όχι Γεωμετρία

MA μόνον Άλγεβρα $MA + 17 - X + 20 - X + X = 40 \Rightarrow MA = X + 3$.

$M\Gamma$ μόνον Γεωμετρία $M\Gamma + 25 - X + 20 - X + X = 50 \Rightarrow M\Gamma = X + 5$.

$M\Sigma$ μόνον Στατιστική $M\Sigma + 17 - X + 25 - X + X = 70 \Rightarrow M\Sigma = X + 28$.



$$X + (20 - X) + (17 - X) + (25 - X) + (X + 3) + (X + 5) + (X + 28) = 111$$
$$X = 13$$

Απ.:13 σύνεδροι παρακολούθησαν και τις τρεις ενότητες

Πρόβλημα 3

Ο θετικός ακέραιος αριθμός **A** έχει τέσσερα ψηφία.

Ο πενταψήφιος ακέραιος αριθμός B σχηματίζεται τοποθετώντας το ψηφίο 1 μπροστά από τον αριθμό A.

Ο πενταψήφιος ακέραιος αριθμός Γ σχηματίζεται τοποθετώντας το ψηφίο 5 στο τέλος του αριθμού A.

Αν ισχύει ότι $\Gamma = 5B$, να βρείτε τις δυνατές τιμές του αριθμού A.

Λύση:

$$B = 10000 + A$$

$$\Gamma = 10A + 5$$

$$\Gamma = 5B \Rightarrow 10A + 5 = 5(10000 + A) \Rightarrow$$

$$10A + 5 = 50000 + 5A \Rightarrow 5A = 49995 \Rightarrow A = 9999$$

Στο τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$, το σημείο M είναι το μέσο του $\Gamma\Delta$ και το N είναι το μέσο του $A\Delta$. Αν το εμβαδόν του τετράπλευρου $NB\Gamma M$ είναι 15 τετραγωνικές μονάδες, να βρείτε το εμβαδόν του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$.



Άρα, το εμβαδόν του τετραγώνου $ABCD$ είναι
 ίσο με $\frac{8}{5} \cdot 15 = 24 \tau.μ.$

