



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2006-07
Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

1. Αν $x, y, z \in \mathbb{R} - \{0\}$ με $x \neq y \neq z \neq x$ και ισχύουν
$$\begin{cases} x^3 - 2005yz = 2006x^2 & : (1) \\ y^3 - 2005zx = 2006y^2 & : (2) \\ z^3 - 2005xy = 2006z^2 & : (3) \end{cases}$$

να αποδείξετε ότι $x + y + z = 4011$.

ΛΥΣΗ

Αφαιρώντας τις (1) και (2) έχουμε:

$$x^3 - y^3 + 2005(x - y) = 2006(x^2 - y^2) \text{ ή}$$

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2) + 2005z(x - y) = 2006(x - y)(x + y), \text{ και επειδή } x \neq y$$

$$x^2 + xy + y^2 + 2005z = 2006(x + y) \quad (4)$$

Όμοια αφαιρώντας τις (2) και (3), επειδή $y \neq z$ έχουμε:

$$y^2 + yz + z^2 + 2005x = 2006(y + z) \quad (5)$$

Αφαιρώντας τις (4) και (5) έχουμε:

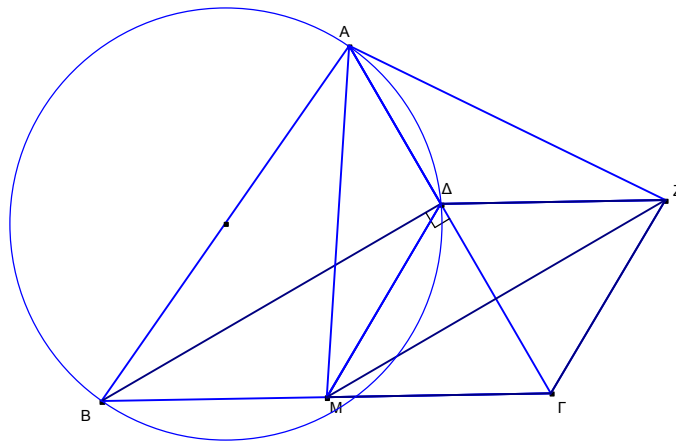
$$x^2 - z^2 + y(x - z) + 2005(z - x) = 2006(x - z) \text{ ή}$$

$$(x - z)(x + z) + y(x - z) - 2005(x - z) = 2006(x - z) \text{ και επειδή } x \neq z$$

$$x + y + z - 2005 = 2006 \text{ ή } x + y + z = 4011.$$

2. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και M είναι το μέσον της πλευράς $B\Gamma$.
 Ο κύκλος με διάμετρο την πλευρά AB τέμνει την $A\Gamma$ στο Δ και από το Δ φέρουμε $\Delta Z \parallel M\Gamma$ (το ΔZ βρίσκεται εκτός του τριγώνου). Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραπλεύρου $AM\Gamma Z$ είναι ίσο με το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

ΛΥΣΗ



Αφού ο κύκλος είναι διαμέτρου AB , έχουμε $\angle B\Delta A = 90^\circ$. Άρα $\Delta M = \frac{B\Gamma}{2} = M\Gamma$, και επειδή $\Delta Z \parallel M\Gamma$, το τετράπλευρο $\Delta M\Gamma Z$ είναι ρόμβος. Επομένως η $\Delta\Gamma$ είναι μεσοκάθετος της MZ . Δηλαδή Το σημείο A βρίσκεται πάνω στην μεσοκάθετη της MZ . Τα τρίγωνα $AZ\Delta$ και $A\Delta M$ είναι ίσα γιατί $AZ = AM$, $A\Delta$ κοινή πλευρά και $\Delta Z = \Delta M$. Άρα $(AM\Gamma Z) = 2(AM\Gamma) = (AB\Gamma)$ αφού AM διάμεσος του τριγώνου $AB\Gamma$.

3. Να λύσετε στο $\mathbb{R}$ την εξίσωση $4(x^2 - x + 1)^3 - 27x^2(x - 1)^2 = 0$.

ΛΥΣΗ

Η δεδομένη εξίσωση γράφεται:

$$4[x(x-1)+1]^3 - 27[x(x-1)]^2 = 0$$

Θέτουμε $x(x-1) = \omega$, οπότε η εξίσωση γίνεται:

$$4(\omega+1)^3 - 27\omega^2 = 0 \quad \text{ή}$$

$$4\omega^3 - 15\omega^2 + 12\omega + 4 = 0 \quad \text{ή}$$

$$4\omega^3 - 16\omega^2 + \omega^2 + 16\omega - 4\omega + 4 = 0 \quad \text{ή}$$

$$4\omega(\omega^2 - 4\omega + 4) + \omega^2 - 4\omega + 4 = 0 \quad \text{ή}$$

$$(\omega - 2)^2(4\omega + 1) = 0.$$

Άρα $\omega = 2$ ή $\omega = -\frac{1}{4}$.

§ Αν $\omega = 2$ τότε $x(x-1) = 2$ ή $x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1) = 0$ επομένως
 $x = 2$ ή $x = -1$.

§ $\omega = -\frac{1}{4}$ τότε $x(x-1) = -\frac{1}{4}$ ή $4x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow (2x-1)^2 = 0$ επομένως
 $x = \frac{1}{2}$.

4. Ένα κουτί περιέχει 30 κόκκινες, 30 πράσινες, 30 μπλέ μπάλες και 10 ακόμα από τις οποίες μερικές είναι μαύρες και μερικές είναι άσπρες. Να βρείτε το μικρότερο αριθμό μπάλων που μπορούμε να πάρουμε από το κουτί, χωρίς να τις κοιτάζουμε για να είμαστε βέβαιοι ότι πήραμε 10 μπάλες με το ίδιο χρώμα.

ΛΥΣΗ

Η χειρότερη περίπτωση για μην πάρω 10 μπάλες του ίδιου χρώματος είναι να πάρω 9 κόκκινες, 9 πράσινες, 9 μπλέ και στην συνέχεια τις 10 άσπρες και μαύρες. Τότε θα έχω πάρει $3 \cdot 9 + 10 = 37$ συνολικά μπάλες.

Άρα η αμέσως επόμενη μπάλα που θα πάρω θα είναι ή κόκκινη ή πράσινη ή μπλέ. Επομένως ο ελάχιστος αριθμός μπάλων που πρέπει να πάρω είναι 38, για να είμαι βέβαιος ότι έχω πάρει 10 μπάλες του ίδιου χρώματος.

5. Να βρείτε όλους τους τριψήφιους $\overline{xyz}$ ($=100x+10y+z$) για τους οποίους ισχύει

$$\frac{7}{4}(\overline{xyz}) = \overline{zyx}.$$

ΛΥΣΗ

Έχουμε $0 < x < 10$ και $y \geq 0, z < 10$

Τότε η δεδομένη παράσταση γίνεται:

$$\frac{7}{4}(100x+10y+z) = 100z+10y+x \quad \text{ή}$$

$$700x+70y+7z = 400z+40y+x \quad \text{ή}$$

$$696x+30y-393z = 0 \quad \text{ή}$$

$$232x+10y=131z. (1)$$

Αρα $z \equiv 2x \pmod{10} \Leftrightarrow z = 2x+10m, m \in \mathbb{Z}$.

Επομένως η (1) γίνεται:

$$232x+10y=131(2x+10m) \quad \text{ή}$$

$$232x+10y=262x+1310m \quad \text{ή}$$

$$10y=30x+1310k, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{ή}$$

$$y=3x+131k.$$

Αφού όμως $0 < x < 10$ και $0 \leq y < 10$ έπεται ότι $k=0$ και άρα $y=3x$.

Η (1) τώρα γράφεται:

$$232x+30x=131z \quad \text{ή} \quad 262x=131z \Leftrightarrow z=2x.$$

Αρα οι τριψήφιοι αριθμοί που ζητάμε είναι 132, 264, 396.