



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 15/12/07

Ωρα εξέτασης: 09:30 -12:30

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα .Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
2. Να γράφετε με μπλέ ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΘΕΜΑΤΑ

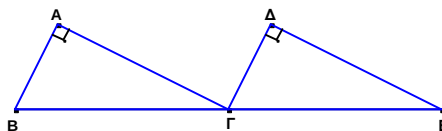
1. Αν x, y, α πραγματικοί αριθμοί με $x + y = 4\alpha$, να αποδείξετε ότι

$$x \left(\frac{y - \alpha}{2} \right)^2 + y \left(\frac{x - \alpha}{2} \right)^2 = \alpha^3.$$

2. Αν α, β, γ πραγματικοί αριθμοί με $\alpha\beta\gamma = 1$, να αποδείξετε ότι

$$\frac{\alpha}{\alpha\beta + \alpha + 1} + \frac{\beta}{\beta\gamma + \beta + 1} + \frac{\gamma}{\gamma\alpha + \gamma + 1} = 1.$$

3. Στο σχήμα τα σημεία Β,Γ,Ε είναι συνευθειακά, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΓΕ είναι ορθογώνια, έχουν ίσες τις υποτείνουσες ΒΓ, ΓΕ και ίσα τα ύψη προς τις υποτείνουσες. Να αποδείξετε ότι:



α) $\square ABG = \square DGE$

β) το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΔΕΒ είναι τριπλάσιο από το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

4. Ένας αγοραστής μέτρησε το μήκος λάστιχου που χρειαζόταν για τον κήπο του και έγραψε το μήκος σε ένα χαρτί (π.χ. χ μέτρα και ψ εκατοστά). Ο πωλητής έκανε λάθος και του έδωσε ψ μέτρα και χ εκατοστά. Όταν ο αγοραστής χρησιμοποίησε 3,5 μέτρα, διαπίστωσε ότι είχε στη διάθεσή του ακόμα διπλάσιο μήκος λάστιχου από αυτό που έγραψε αρχικά στο χαρτί. Να βρείτε το πραγματικό μήκος του λάστιχου που παρήγγειλε ο αγοραστής.

5. Έστω $K = \sqrt{\frac{49}{2} + \sqrt{\frac{2401}{4} - n}} + \sqrt{\frac{49}{2} - \sqrt{\frac{2401}{4} - n}}$, όπου $n \in \mathbb{N}$.

α) Να αποδείξετε ότι $K = \sqrt{49 + 2\sqrt{n}}$

β) Να βρείτε όλους τους ακέραιους αριθμούς n , για τους οποίους η παράσταση K είναι ακέραιος αριθμός.



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2007

Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

1. Αν x, y, α πραγματικοί αριθμοί με $x + y = 4\alpha$, να αποδείξετε ότι

$$x\left(\frac{y-\alpha}{2}\right)^2 + y\left(\frac{x-\alpha}{2}\right)^2 = \alpha^3.$$

ΛΥΣΗ

$$\begin{aligned} x\left(\frac{y-\alpha}{2}\right)^2 + y\left(\frac{x-\alpha}{2}\right)^2 &= \frac{1}{4}\left[x(y-\alpha)^2 + y(x-\alpha)^2\right] \\ &= \frac{1}{4}(xy^2 - 2\alpha xy + x\alpha^2 + yx^2 - 2\alpha xy + y\alpha^2) \\ &= \frac{1}{4}[xy(y+x) + \alpha^2(x+y) - 4\alpha xy] \\ &= \frac{1}{4}(4\alpha xy + 4\alpha^3 - 4\alpha xy) \\ &= \frac{1}{4}4\alpha^3 \\ &= \alpha^3 \end{aligned}$$

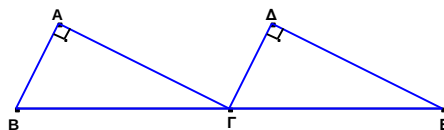
2. Αν α, β, γ πραγματικοί αριθμοί με $\alpha\beta\gamma=1$, να αποδείξετε ότι

$$\frac{\alpha}{\alpha\beta+\alpha+1} + \frac{\beta}{\beta\gamma+\beta+1} + \frac{\gamma}{\gamma\alpha+\gamma+1} = 1.$$

ΛΥΣΗ

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\alpha\beta+\alpha+1} + \frac{\beta}{\beta\gamma+\beta+1} + \frac{\gamma}{\gamma\alpha+\gamma+1} &= \frac{\alpha}{\alpha\beta+\alpha+\alpha\beta\gamma} + \frac{\beta}{\beta\gamma+\beta+1} + \frac{\gamma}{\gamma\alpha+\gamma+1} \\ &= \frac{1}{\beta+1+\beta\gamma} + \frac{\beta}{\beta\gamma+\beta+1} + \frac{\gamma}{\gamma\alpha+\gamma+1} \\ &= \frac{\beta+1}{\beta\gamma+\beta+1} + \frac{\gamma}{\gamma\alpha+\gamma+1} \\ &= \frac{\beta+1}{\beta\gamma+\beta+\alpha\beta\gamma} + \frac{\gamma}{\gamma\alpha+\gamma+1} \\ &= \frac{\beta+1}{\beta(\gamma\alpha+\gamma+1)} + \frac{\gamma}{\gamma\alpha+\gamma+1} \\ &= \frac{\beta+1+\beta\gamma}{\beta(\gamma\alpha+\gamma+1)} \\ &= \frac{\beta\gamma+\beta+1}{\alpha\beta\gamma+\beta\gamma+\beta} \\ &= \frac{\beta\gamma+\beta+1}{1+\beta\gamma+\beta} \\ &= 1 \end{aligned}$$

3. Στο σχήμα τα σημεία Β,Γ,Ε είναι



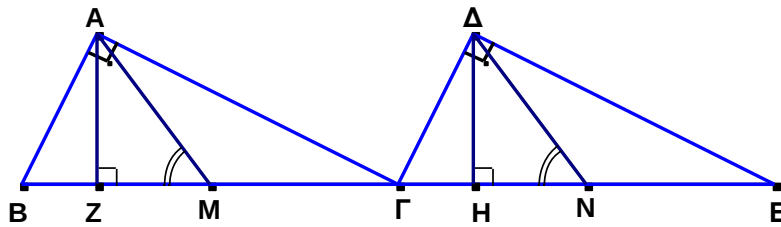
συνευθειακά, τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta\Gamma E$ είναι ορθογώνια, έχουν ίσες τις υποτεινουσες $B\Gamma$, ΓE και ίσα τα ύψη προς τις υποτεινουσες. Να αποδείξετε ότι:

α) $\square AB\Gamma = \square \Delta\Gamma E$

β) το εμβαδόν του τετραπλεύρου $A\Delta EB$ είναι τριπλάσιο από το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

ΛΥΣΗ

....



α) Φέρουμε τις διαμέσους AM , ΔN των ορθογωνίων τριγώνων $AB\Gamma$, $\Gamma\Delta E$ αντίστοιχα. Τότε $AM = \Delta N = MB = M\Gamma = N\Gamma = NE$ και τα ορθογώνια τρίγωνα AZM , ΔHN είναι ίσα, από όπου $\angle AMB = \angle \Delta N\Gamma$ και άρα τα ισοσκελή τρίγωνα AMB , $\Delta N\Gamma$ είναι ίσα. Συνεπώς $AB = \Delta\Gamma$ και τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$, $\Delta\Gamma E$ είναι ίσα.

β) Επειδή $\angle ABM = \angle \Delta\Gamma N$, είναι $AB \parallel \Delta\Gamma$ και αφού $AB = \Delta\Gamma$, το $A\Delta\Gamma B$ είναι παραλληλόγραμμο. Τότε $(A\Gamma\Delta) = (AB\Gamma) = (\Gamma\Delta E) = \varepsilon$ και συνεπώς $(A\Delta EB) = 3\varepsilon$.

4. Κάποιος μέτρησε το μήκος λάστιχου που χρειαζόταν για τον κήπο του και έγραψε το μήκος σε ένα χαρτί (π.χ. χ μέτρα και ψ εκατοστά). Ο πωλητής έκανε λάθος και του

έδωσε ψ μέτρα και χ εκατοστά. Όταν ο αγοραστής ξόδεψε 3,5 μέτρα, διαπίστωσε ότι είχε στη διάθεσή του ακόμα διπλάσιο μήκος λάστιχου από αυτό που έγραψε αρχικά στο χαρτί. Να βρείτε το πραγματικό μήκος του λάστιχου που παρήγγειλε.

ΛΥΣΗ

Έστω ότι ο αγοραστής παρήγγειλε χ μέτρα και ψ εκατοστά, δηλαδή $(100\chi + \psi)$ εκατοστά. Σύμφωνα με το πρόβλημα, έχουμε

$$100\psi + \chi - 350 = 2(100\chi + \psi) \Leftrightarrow 100(-2\chi + \psi - 3) = -\chi + 2\psi + 50 \\ \Leftrightarrow 100\kappa = -\chi + 2\psi + 50 : (1)$$

όπου $-2\chi + \psi - 3 = \kappa : (2)$, με κ ακέραιο.

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq \chi \leq 99 \\ \text{Όμως } 0 \leq \psi \leq 99 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -99 \leq -\chi \leq 0 \\ 0 \leq 2\psi \leq 198 \end{array} \right\} \Rightarrow -49 \leq -\chi + 2\psi + 50 \leq 248$$

$$\Rightarrow -49 \leq 100\kappa \leq 248 \Rightarrow -0,49 \leq \kappa \leq 2,48$$

και αφού κ ακέραιος, $\kappa \in \{0, 1, 2\}$.

Από τις (1) και (2) έχουμε:

- Για $\kappa = 0$: $\begin{cases} -\chi + 2\psi + 50 = 0 \\ -2\chi + \psi - 3 = 0 \end{cases}$, που δε δίνει ακέραιες λύσεις.
- Για $\kappa = 1$: $\begin{cases} -\chi + 2\psi + 50 = 100 \\ -2\chi + \psi - 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\chi + 2\psi = 50 \\ -2\chi + \psi = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = 14 \\ \psi = 32 \end{cases}$
- Για $\kappa = 2$: $\begin{cases} -\chi + 2\psi + 50 = 200 \\ -2\chi + \psi - 3 = 2 \end{cases}$, που δε δίνει ακέραιες λύσεις.

Άρα παρήγγειλε 14 μέτρα και 32 εκατοστά.

5. Έστω $K = \sqrt{\frac{49}{2} + \sqrt{\frac{2401}{4} - n}} + \sqrt{\frac{49}{2} - \sqrt{\frac{2401}{4} - n}}$, όπου $n \in \mathbb{N}$.

α) Να αποδείξετε ότι $K = \sqrt{49 + 2\sqrt{n}}$

β) Να βρείτε όλους τους ακέραιους αριθμούς n , για τους οποίους η παράσταση K είναι ακέραιος αριθμός.

ΛΥΣΗ

Καταρχήν πρέπει $\frac{2401}{4} - n \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq n \leq 600 : (1)$

$$\alpha) \quad K^2 = 49 + 2\sqrt{\left(\frac{49}{2}\right)^2 - \left(\frac{2401}{4} - n\right)} \Leftrightarrow K^2 = 49 + 2\sqrt{n} \Leftrightarrow K = \sqrt{49 + 2\sqrt{n}} \quad (K > 0).$$

$$\beta) \quad K = \sqrt{49 + 2\sqrt{n}} \Leftrightarrow n = \left(\frac{K^2 - 49}{2}\right)^2, \text{ οπότε από την (1) έχουμε}$$

$$0 \leq \left(\frac{K^2 - 49}{2}\right)^2 \leq 600 \Leftrightarrow 49 \leq K^2 \leq 49 + 20\sqrt{6} \Leftrightarrow 7 \leq K \leq \sqrt{49 + 20\sqrt{6}}.$$

Για να είναι ο K ακέραιος, πρέπει $K \in \{7, 8, 9\}$ και αφού $n = \left(\frac{K^2 - 49}{2}\right)^2$

$n = 0$ ή $n = 256$.