



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 19/12/09

Ωρα εξέτασης: 09:30 -12:30

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

1. Αν όλες οι ρίζες της εξίσωσης $(x-4)(x^2-8x+14)^2 = (x-4)^3$ είναι ρίζες του πολυωνύμου $P(x) = x^5 + ax^4 + \beta x^3 + 29ax^2 + (7\beta - 41)x + 36a$, να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών α και β .

Προτεινόμενη λύση:

$$\begin{aligned} \text{Η εξίσωση γράφεται } (x-4)(x^2-8x+14)^2 - (x-4)^3 &= 0 \\ (x-4)[(x^2-8x+14)^2 - (x-4)^2] &= 0 \\ (x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6) &= 0 \end{aligned}$$

και οι ρίζες της εξίσωσης είναι $x = 2, x = 3, x = 4, x = 5, x = 6$.

$$\begin{aligned} P(2) = 0 &\Leftrightarrow 2^5 + a \cdot 2^4 + \beta \cdot 2^3 + 29a \cdot 2^2 + (7\beta - 41) \cdot 2 + 36a = 0 \\ &\Leftrightarrow 84a + 11\beta = 25 : (1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(3) = 0 &\Leftrightarrow 3^5 + a \cdot 3^4 + \beta \cdot 3^3 + 29a \cdot 3^2 + (7\beta - 41) \cdot 3 + 36a = 0 \\ &\Leftrightarrow 189a + 24\beta = -60 : (2). \end{aligned}$$

Από το σύστημα των (1), (2) προκύπτει $\alpha = -20$, $\beta = 155$.

2. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $A = n^5 - n$ διαιρείται με το 30, για κάθε ακέραιο n .

Προτεινόμενη λύση:

Η παράσταση $A = n^5 - n$ παραγοντοποιείται ως εξής:

$$A = n^5 - n = n(n^2 - 1)(n^2 + 1) = n(n-1)(n+1)(n^2 + 1)$$

Επειδή οι αριθμοί $n-1, n, n+1$ είναι διαδοχικοί ακέραιοι αριθμοί έπεται ότι

$$6 / (n-1)n(n+1) \text{ άρα } 6 / n^5 - n$$

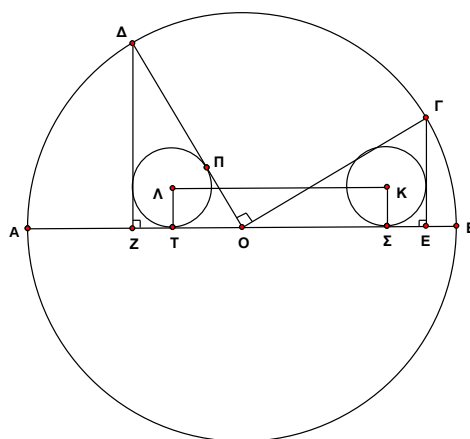
- Αν $n = 5k, k \in \mathbb{Z}$ τότε $5 / n$
- Αν $n \equiv 1 \pmod{5}, k \in \mathbb{Z}$ τότε $5 / n - 1$
- Αν $n \equiv 2 \pmod{5}, k \in \mathbb{Z}$ τότε $5 / n^2 + 1$
- Αν $n \equiv 3 \pmod{5}, k \in \mathbb{Z}$ τότε $5 / n^2 + 1$
- Αν $n \equiv 4 \pmod{5}, k \in \mathbb{Z}$ τότε $5 / n + 1$

Άρα $\forall n \in \mathbb{Z}$ τότε $5 / n^5 - n$ και επειδή $(5,6) = 1$ άρα $30 / n^5 - n$.

3. Δίνεται κύκλος (O, R) διαμέτρου AB και δυο κάθετες ακτίνες του OG, OD . Φέρουμε GE και DZ κάθετες στην AB (E, Z σημεία της AB) και έστω K, Λ τα κέντρα των εγγεγραμμένων κύκλων των ορθογώνιων τριγώνων OEG, OZD αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι :
- α) Τα ορθογώνια τρίγωνα OEG, OZD είναι ίσα.
- β) Το $K\Lambda T\Sigma$ είναι ορθογώνιο, όπου Σ, T τα σημεία επαφής της διαμέτρου AB με τους εγγεγραμμένους κύκλους των ορθογώνιων τριγώνων OEG, OZD αντίστοιχα.
- γ) $K\Lambda = R$.

Προτεινόμενη λύση:

- α) Τα ορθογώνια τρίγωνα OEG, OZD είναι ίσα, διότι έχουν ίσες τις υποτείνουσες OG, OD και $\angle GOE = \angle ZDO$ (πλευρές κάθετες)
- β) $AT \parallel K\Sigma$, αφού είναι κάθετες στην AB και είναι ακτίνες ίσων κύκλων. Άρα το $K\Lambda T\Sigma$ είναι ορθογώνιο.
- γ) $K\Lambda = \Sigma T = \Sigma O + OT = \Delta\Pi + O\Pi = OD = R$



4. Χωρίζουμε ένα τετράγωνο με μήκος πλευράς 2010 σε 2010×2010 τετραγωνικά κελιά με ευθείες παράλληλες προς τις πλευρές του. Σε κάθε τετραγωνικό κελί γράφουμε τυχαία ένα από τους αριθμούς $+1, -1$. Συμβολίζουμε με A_i το γινόμενο των αριθμών της i -γραμμής και με B_i το γινόμενο των αριθμών της i -στήλης του πίνακα ($i = 1, 2, 3, \dots, 2010$). Να αποδείξετε ότι το άθροισμα $S = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_{2010} + B_1 + B_2 + B_3 + \dots + B_{2010}$ είναι πολλαπλάσιο του 4.

Προτεινόμενη λύση:

Προφανώς αν πολλαπλασιάσουμε τους αριθμούς των κελιών κάθε γραμμής A_i και κάθε στήλης B_i είναι $+1$ ή -1 . Υποθέτουμε ότι από τις $A_i, i = 1, 2, 3, \dots, 2010$ γραμμές οι α έχουν το γινόμενο των στοιχείων τους $+1$ και επομένως οι $2010 - \alpha$ γραμμές θα έχουν το γινόμενο των στοιχείων τους -1 . Όμοια υποθέτουμε ότι από τις $B_i, i = 1, 2, 3, \dots, 2010$ στήλες οι β έχουν το γινόμενο των στοιχείων τους $+1$ και επομένως οι $2010 - \beta$ στήλες θα έχουν το γινόμενο των στοιχείων τους -1 . Παρατηρούμε ότι τα γινόμενα $A_1 A_2 \dots A_{2010}$ και $B_1 B_2 \dots B_{2010}$ είναι ίσα. Άρα $(-1)^{2010-\alpha} = (-1)^{2010-\beta}$. Για να ισχύει η τελευταία ισότητα πρέπει οι αριθμοί α και β να είναι ή και οι δύο άρτιοι ή και οι δύο περιττοί ταυτόχρονα. Επομένως έχουμε:

$$S = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_{2010} + B_1 + B_2 + B_3 + \dots + B_{2010} = \alpha + (2010 - \alpha)(-1) + \beta + (2010 - \beta)(-1) = 2(\alpha + \beta) - 4020.$$

Αφού $\alpha + \beta$ είναι άρτιος έπεται ότι το 4 διαιρεί το δεύτερο μέρος της τελευταίας σχέσης.