



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 18/12/10

Ωρα εξέτασης: 09:30 -12:30

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

1. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = a(x-1)(x-2)(x-3)(x-\rho)$ με $a, \rho \in \mathbb{R}$.
Αν $P(4) = 12$ και $P(5) = 144$, να βρείτε το τελευταίο ψηφίο του αριθμού $P(2010)$

Προτεινόμενη λύση:

$$P(x) = a(x-1)(x-2)(x-3)(x-\rho)$$

Από το $P(4) = 12$ έχουμε: $6a(4-\rho) = 12 \Leftrightarrow a(4-\rho) = 2$

Από το $P(5) = 144$ έχουμε: $24a(5-\rho) = 144 \Leftrightarrow a(5-\rho) = 6$

Οι τιμές των a και ρ είναι: $a = 4$ και $\rho = \frac{7}{2}$. Άρα

$$P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(4x-14)$$

και

$$\begin{aligned} P(2010) &= (2010-1)(2010-2)(2010-3)(8040-14) \\ &= 2009 \cdot 2008 \cdot 2007 \cdot 8026 \end{aligned}$$

που σημαίνει ότι το τελευταίο ψηφίο του αριθμού $P(2010)$ είναι το 4.

2. Να αποδείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του ακεραίου αριθμού $n > 1$, ο αριθμός $n^4 + 4^n$ δεν είναι πρώτος.

Προτεινόμενη λύση:

Εάν ο αριθμός n είναι άρτιος, τότε $n^4 + 4^n$ είναι επίσης άρτιος μεγαλύτερος του 2, άρα δεν είναι πρώτος.

Εάν ο αριθμός n είναι περιττός έχουμε:

$$\begin{aligned} n^4 + 4^n &= n^4 + 2^{2n} = (n^2 + 2^n)^2 - 2^{n+1} \cdot n^2 \\ &= \left[(n^2 + 2^n) + n \cdot 2^{\frac{n+1}{2}} \right] \cdot \left[(n^2 + 2^n) - n \cdot 2^{\frac{n+1}{2}} \right] \end{aligned}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι ο πρώτος παράγοντας του γινομένου είναι μεγαλύτερος από το 1 όταν $n > 1$. Για τον δεύτερο παράγοντα θα έχουμε:

$$\begin{aligned} n^2 + 2^n - n \cdot 2^{\frac{n+1}{2}} &> 1 \Leftrightarrow n^2 + 2^n - 1 > n \cdot 2^{\frac{n+1}{2}} \\ (n^2 + 2^n - 1)^2 &> n^2 \cdot 2^{n+1} \Leftrightarrow n^4 + 2^{2n} + 1 + n^2 2^{n+1} - 2n^2 - 2 \cdot 2^n > n^2 2^{n+1} \\ (n^4 - 2n^2) + 2^{2n} - 2 \cdot 2^n + 1 &> 0 \\ n^4 - 2n^2 + (2^n - 1)^2 &> 0 \quad \text{ισχύει } \forall n \in \mathbb{N}, n > 1. \end{aligned}$$

Άρα και πάλι ο αριθμός $n^4 + 4^n$ δεν είναι πρώτος.

3. Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} x + \frac{1}{y} = \frac{5}{2} \\ y + \frac{1}{z} = \frac{1}{4} \\ z + \frac{1}{x} = -\frac{2}{3} \end{cases}$, όπου $x, y, z \neq 0$ πραγματικοί αριθμοί.

Προτεινόμενη λύση:

Από την πρώτη εξίσωση παίρνουμε $x = \frac{5y-2}{2y}$ και από τη δεύτερη $y = \frac{z-4}{4z}$

Αντικαθιστώντας στην τρίτη έχουμε

$$z + \frac{2y}{5y-2} = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow z + \frac{8-2z}{20+3z} = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow 9z^2 + 60z + 64 = 0 \Leftrightarrow (3z + 10)^2 = 36$$

Απ όπου $z = -\frac{4}{3}$ ή $z = -\frac{16}{3}$.

Εύκολα βρίσκουμε ότι οι λύσεις του συστήματος είναι :

$$(x, y, z) = \left(\frac{3}{2}, 1, -\frac{4}{3}\right) \text{ και } (x, y, z) = \left(\frac{3}{14}, \frac{7}{16}, -\frac{16}{3}\right).$$

4. Στις κάθετες πλευρές AG και AB ορθογωνίου και μη ισοσκελούς τριγώνου $ABΓ$ παίρνουμε σημεία $Δ$ και $Ε$ αντίστοιχα, ώστε $\angle AED = \angle AΓB$. Συμβολίζουμε M το μέσον του ED , N το μέσον του $BΓ$ και O το σημείο τομής των μεσοκαθέτων των ED , $BΓ$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A , M , N , O είναι κορυφές παραλληλογράμμου.

Προτεινόμενη λύση:

Επειδή $MO \perp ED$ και $NO \perp BΓ$,

αρκεί να αποδείξουμε ότι

$AM \perp BΓ$ και $AN \perp ED$.

Στο τρίγωνο $\triangle AKB$ έχουμε:

$$\angle KBA = 90^\circ - \angle AΓB$$

Όμως από την υπόθεση

$\angle AED = \angle AΓB$ θα πάρουμε ότι:

$$\angle KBA = 90^\circ - \angle AED$$

Από το ισοσκελές τρίγωνο $\triangle AME$ έχουμε $\angle AED = \angle BAK$, επομένως

$$\angle KBA + \angle BAK = 90^\circ, \text{ άρα}$$

$AM \perp BΓ$ και τελικά $AM \parallel NO$.

Επίσης $\angle ADE + \angle DAK = \angle ΓBA + \angle AΓB = 90^\circ$, άρα $AN \parallel MO$. Άρα τα σημεία A , M , N , O είναι κορυφές παραλληλογράμμου.

