



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2010

Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 06/11/2010

Ωρα εξέτασης: 10:00 -12:00

Προτεινόμενες λύσεις

1. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta \neq 0$ για τους οποίους ισχύει

$$\alpha^2 + \delta^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\delta - \beta^2 - \gamma^2) = 0.$$

Να αποδείξετε ότι:

$$(\alpha) \alpha = \beta = \gamma = \delta \quad \text{και} \quad (\beta) \frac{\alpha(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2} = 1.$$

Λύση

$$(\alpha) \quad \alpha^2 + \delta^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\delta - \beta^2 - \gamma^2) = 0$$

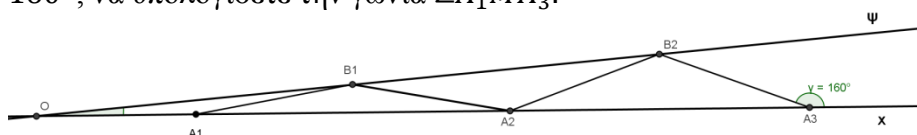
$$(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \delta)^2 = 0$$

$$\alpha - \beta = \beta - \gamma = \gamma - \delta = 0$$

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta$$

$$(\beta) \quad \frac{\alpha(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2} = \frac{\alpha(\alpha+\alpha+\alpha+\alpha)}{\alpha^2+\alpha^2+\alpha^2+\alpha^2} = \frac{4\alpha^2}{4\alpha^2} = 1$$

2. Δίνεται η γωνία $\angle \chi O \psi$. Πάνω στις πλευρές $O\chi$ και $O\psi$ της γωνίας παίρνουμε αντιστοίχα τα σημεία A_1, A_2, A_3 και B_1, B_2 έτσι ώστε να ισχύει $OA_1 = A_1B_1 = B_1A_2 = A_2B_2 = B_2A_3$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Αν M είναι το σημείο τομής των ευθειών A_1B_1 και B_2A_3 και η γωνία $\angle B_2A_3\chi = 160^\circ$, να υπολογίσετε την γωνία $\angle A_1MA_3$.



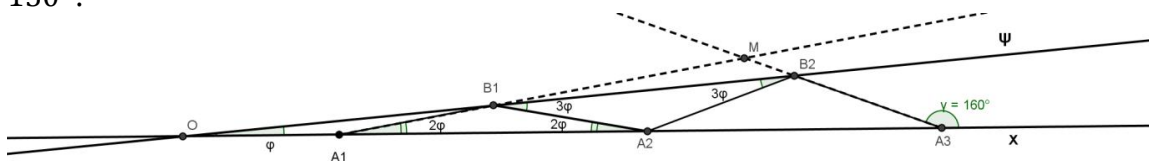
Λύση

Έστω $\angle B_1OA_1 = \varphi$ τότε $\angle B_1A_1A_2 = \angle B_1A_2A_1 = 2\varphi$ (εξωτερική γωνία του τριγώνου $\triangle A_1B_1A_2$). Άρα $\angle A_2B_1B_2 = \angle B_1B_2A_2 = 3\varphi$. Στο τρίγωνο έχουμε

$$\angle B_2A_3A_2 = 20^\circ \text{ και } \angle A_2B_2A_3 = 140^\circ.$$

Από το τρίγωνο OB_2A_3 έχουμε $\varphi + 3\varphi + 160^\circ = 180^\circ \Rightarrow \varphi = 5^\circ$.

Τελικά από το τρίγωνο $\triangle A_1MA_3$ θα πάρουμε $\angle A_1MA_3 = 180^\circ - 20^\circ - 2\varphi \Rightarrow \angle A_1MA_3 = 150^\circ$.



3. Να λύσετε το σύστημα

$$x(x + y + z) = 4 \quad : (1)$$

$$y(x + y + z) = 36 \quad : (2)$$

$$z(x + y + z) = 9 \quad : (3)$$

Λύση

Είναι, $\frac{x}{4} = \frac{y}{36} = \frac{z}{9} = \lambda$ απ' όπου $x = 4\lambda$, $y = 36\lambda$, $z = 9\lambda$.

Αντικαθιστούμε π.χ. στην (1) και έχουμε $4\lambda(4\lambda + 36\lambda + 9\lambda) = 4$ ή $4\lambda \cdot 49\lambda = 4$ ή $\lambda^2 = \frac{1}{49}$

$$\text{ή } \lambda = \pm \frac{1}{7}$$

Τέλος, οι λύσεις του συστήματος είναι $(x, y, z) = \left(\frac{4}{7}, \frac{36}{7}, \frac{9}{7}\right)$ και $(x, y, z) =$

$$\left(-\frac{4}{7}, -\frac{36}{7}, -\frac{9}{7}\right).$$

4. Να βρείτε όλους τους τετραψήφιους αριθμούς που είναι πολλαπλάσια του 11, έχουν άθροισμα ψηφίων 4 και γινόμενο ψηφίων 0.

Λύση

Έστω $\overline{αβγδ}$ ο ζητούμενος 4ψήφιος αριθμός.

Αφού το γινόμενο των ψηφίων είναι 0, ένα τουλάχιστον από τα ψηφία είναι το 0.

Όμως αυτό δεν μπορεί να είναι το α (4ψήφιος) .

Θα είναι, λοιπόν, υποχρεωτικά 0 τουλάχιστον ένα από τα β, γ, δ και αφού ο αριθμός έχει άθροισμα ψηφίων 4, πιθανές λύσεις είναι οι 4ψήφιοι:

1012, 1021, 2011, 1102, 1201, 2101, 1120, 1210, 2110, 1003, 1030, 1300, 3001, 3010, 3100, 2002, 2020, 2200, 4000.

Εύκολα βρίσκουμε ότι από αυτούς πολλαπλάσια του 11 είναι οι 1012, 1210, 2101, 2002, 2200 που είναι οι ζητούμενοι.