



**ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ**

Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 10/12/11

Ωρα εξέτασης: 09:30 -12:30

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Πρόβλημα 1:

α) Να δείξετε ότι αν x, y θετικοί πραγματικοί αριθμοί ισχύει:

$$xy \leq \frac{(x+y)^2}{4}$$

β) Αν α, β, γ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί με $\alpha + \beta + \gamma = 1$, να δείξετε ότι:

$$\sqrt{\alpha + \beta\gamma} + \sqrt{\beta + \gamma\alpha} + \sqrt{\gamma + \alpha\beta} \leq 2.$$

Λύση

α) Είναι, $(x - y)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \Rightarrow (x + y)^2 \geq 4xy$

$$\Rightarrow xy \leq \frac{(x+y)^2}{4}$$

$$\beta) \sqrt{\alpha + \beta\gamma} \leq \sqrt{\alpha + \frac{(\beta+\gamma)^2}{4}} = \sqrt{\alpha + \frac{(1-\alpha)^2}{4}} = \sqrt{\frac{(1+\alpha)^2}{4}} = \frac{1+\alpha}{2}.$$

Άρα,

$$\sqrt{\alpha + \beta\gamma} \leq \frac{1+\alpha}{2} \text{ και όμοια } \sqrt{\beta + \gamma\alpha} \leq \frac{1+\beta}{2}, \sqrt{\gamma + \alpha\beta} \leq \frac{1+\gamma}{2}$$

Προσθέτουμε τις τρεις σχέσεις:

$$\begin{aligned} \sqrt{\alpha + \beta\gamma} + \sqrt{\beta + \gamma\alpha} + \sqrt{\gamma + \alpha\beta} &\leq \frac{1+\alpha}{2} + \frac{1+\beta}{2} + \frac{1+\gamma}{2} \\ &= \frac{3+\alpha+\beta+\gamma}{2} \\ &= 2, \text{ αφού } \alpha + \beta + \gamma = 1. \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2:

Να βρείτε όλα τα ορθογώνια τρίγωνα με μήκη πλευρών ακέραιους, των οποίων το εμβαδόν είναι αριθμητικά ίσο με την περίμετρο.

Λύση

Αν x, y οι κάθετες πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου, τότε σύμφωνα με το πρόβλημα έχουμε:

$$\frac{xy}{2} = x + y + \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 + y^2} = xy - 2x - 2y$$

Υψώνουμε στο τετράγωνο τα μέλη της τελευταίας και, μετά τις απλοποιήσεις, παίρνουμε:

$$xy - 4x - 4y + 8 = 0 \Leftrightarrow xy - 4x - 4y + 16 = 8$$

$$\Leftrightarrow (x - 4)(y - 4) = 8 \text{ και αφού } x, y \text{ θετικοί ακέραιοι προκύπτουν}$$

οι λύσεις: $\{(6, 8), (8, 6), (5, 12), (12, 5)\}$.

Άρα τα ζητούμενα ορθογώνια τρίγωνα είναι εκείνα που έχουν πλευρές 6, 8, 10 ή 5, 12, 13.

Πρόβλημα 3:

Να δείξετε ότι ο αριθμός

$$A = 3^{4n+1} - 2 \cdot 3^{2n} - 1$$

διαίρεται με το 8 για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Λύση

$$\begin{aligned} A &= 3^{4n+1} - 2 \cdot 3^{2n} - 1 = 3 \cdot (3^{2n})^2 - 2 \cdot 3^{2n} - 1 = (3^{2n} - 1)(3 \cdot 3^{2n} + 1) \\ &= (9^n - 1)(3 \cdot 3^{2n} + 1) \\ &= (9 - 1)(9^{n-1} + 9^{n-2} + \dots + 9 + 1)(3 \cdot 3^{2n} + 1) \\ &= 8\kappa \end{aligned}$$

Πρόβλημα 4:

Δίνεται ρόμβος $AB\Gamma\Delta$, και E, Z τυχαία σημεία των διαγωνίων του $A\Gamma$ και $B\Delta$ αντίστοιχα.

Έστω N το σημείο τομής των AZ και ΔE και T το σημείο τομής των BE και ΓZ . Να αποδείξετε ότι $\angle GTE = \angle AN\Delta$.

Λύση

Η γωνία $\angle OZT$ είναι εξωτερική του τριγώνου ΔZBT και άρα παίρνουμε

$$\angle OZT = \angle OBT + \angle ZTB = \angle OBT + \angle GTE$$

επομένως

$$\angle GTE = \angle OZT - \angle OBT \quad (1).$$

Από τα ισοσκελή τρίγωνα $\Delta AZ\Gamma$ και $\Delta BE\Delta$ έχουμε

$$\angle AZO = \angle OZ\Gamma \text{ και } \angle OBE = \angle O\Delta E. \text{ Άρα}$$

$$2(\angle OZT) = \angle AN\Delta + \angle ZMN = \angle AN\Delta + (\angle OZT + \angle O\Delta E)$$

$$\text{δηλαδή } \angle AN\Delta = \angle OZT - \angle O\Delta E = \angle OZT - \angle OBT \quad (2).$$

Από τις (1) και (2) έχουμε $\angle GTE = \angle AN\Delta$.

