



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 8/12/12

Ωρα εξέτασης: 09:30 -12:30

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

Πρόβλημα 1:

α) Να αποδείξετε ότι:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

β) Για τους πραγματικούς αριθμούς x, y, z ισχύουν
$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 26 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 90 \end{cases}$$

Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων $A = xyz$ και $B = x^4 + y^4 + z^4$.

Προτεινόμενη λύση:

α) Κάνοντας πράξεις στο δεύτερο μέλος της ταυτότητας παίρνουμε:

$$\begin{aligned} (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \\ = a^3 + ab^2 + ac^2 - a^2b - ab^2 - ca^2 + ba^2 + b^3 + bc^2 - ab^2 - b^2c - abc \\ + ca^2 + cb^2 + c^3 - cab - bc^2 - c^2a = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc. \end{aligned}$$

β) Υψώνοντας στο τετράγωνο τα δύο μέλη της $x + y + z = 6$ παίρνουμε:

$$(x + y + z)^2 = 36 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 36 \Leftrightarrow xy + yz + xz = 5 \quad (1).$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα του (α) έχουμε:

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \Leftrightarrow 90 - 3xyz = 6(25 - 5) \Leftrightarrow \\ A = xyz = -12 \quad (2). \end{aligned}$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο τα δύο μέλη της $x^2 + y^2 + z^2 = 26$ παίρνουμε:

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 26^2 \Leftrightarrow x^4 + y^4 + z^4 + 2(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2) = 676 \quad (3).$$

Από την (1) έχουμε:

$(xy + yz + xz)^2 = 25 \Leftrightarrow x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 + 2xyz(x + y + z) = 25$. Η τελευταία λόγω της (2) γίνεται: $x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 = 25 - 2(-12)6 \Leftrightarrow x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 = 169$. Τελικά από την (3) θα πάρουμε: $B = x^4 + y^4 + z^4 = 676 - 2(169) = 338$.

Πρόβλημα 2:

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ με τύπο $f(k) = ak + \beta$, $a, \beta, k \in \mathbb{Z}$, (όπου $\mathbb{Z}$ είναι το σύνολο των ακεραίων αριθμών), τέτοια ώστε οι αριθμοί $f(3k + 1)$, $f(3k) + 1$ και $3f(k) + 1$ είναι διαδοχικοί ακέραιοι αριθμοί (με κάποια σειρά) για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Να βρείτε όλες αυτές τις συναρτήσεις.

Προτεινόμενη λύση:

Έχουμε από τα δεδομένα του προβλήματος

$$f(3k+1) = \alpha(3k+1) + \beta = 3\alpha k + \beta + \alpha$$

$$f(3k) + 1 = 3\alpha k + \beta + 1$$

$$3f(k) + 1 = 3(\alpha k + \beta) + 1 = 3\alpha k + \beta + 2\beta + 1$$

Οι τρεις αυτοί αριθμοί έχουν κοινό προσθετέο τον $3\alpha k + \beta$, $k \in \mathbb{Z}$, άρα οι αριθμοί α , 1 , $2\beta + 1$ είναι διαδοχικοί ακέραιοι με κάποια σειρά.

Αφού ο ένας από αυτούς είναι το 1, οι μόνες δυνατές περιπτώσεις είναι να είναι οι τριάδες:

$$(1, 2, 3)$$

$$(0, 1, 2)$$

$$(-1, 0, 1)$$

Όμως, επειδή $2\beta + 1$ είναι περιττός αριθμός, από την πρώτη τριάδα έχουμε:

$$\alpha = 2 \text{ και } 2\beta + 1 = 3 \Leftrightarrow \beta = 1$$

Άρα $f(k) = 2k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$.

Η δεύτερη τριάδα απορρίπτεται, αφού $2\beta + 1$ είναι περιττός αριθμός.

Από την τρίτη τριάδα έχουμε:

$$2\beta + 1 = -1 \Leftrightarrow \beta = -1 \text{ και } \alpha = 0$$

Άρα $f(k) = -1$.

Δηλαδή οι μόνες συναρτήσεις που ικανοποιούν τις συνθήκες του προβλήματος είναι οι:

$$f(k) = 2k + 1 \text{ και } f(k) = -1, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Πρόβλημα 3:

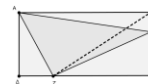
Αν E, Z είναι σημεία των πλευρών $B\Gamma, \Gamma\Delta$ αντίστοιχα ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$, να αποδείξετε ότι

$$E\mu\beta(AB\Gamma\Delta) = 2E\mu\beta(AEZ) + (BE)(\Delta Z)$$

(με $E\mu\beta(XYZ\Omega)$ συμβολίζουμε το εμβαδόν του πολυγώνου $XYZ\Omega$)

Προτεινόμενη λύση:

$$\begin{aligned} E\mu\beta(AB\Gamma\Delta) &= 2(AZB) = 2[(AZE) - (BEZ)] \\ &= 2[(AZE) + (ABE) - (BEZ)] \\ &= 2(AZE) + AB \cdot BE - BE \cdot Z\Gamma \\ &= 2(AZE) + BE(AB - Z\Gamma) \\ &= 2(AZE) + BE(\Gamma\Delta - Z\Gamma) \\ &= 2(AZE) + BE \cdot \Delta Z. \end{aligned}$$



Πρόβλημα 4:

Σε μια πόλη όλοι οι δρόμοι έχουν κατευθύνσεις Νότος-Βορράς ή Ανατολή-Δύση και χωρίζουν την πόλη σε τετράγωνα με μήκος πλευράς α μέτρα. Τέσσερις ταξιτζήδες, ο Αντώνης, ο Βασίλης, ο Γιώργος και ο Δημήτρης βρίσκονται κάποια στιγμή σε τέσσερις διασταυρώσεις A', B', Γ' και Δ' αντίστοιχα που τα τέσσερα αυτά σημεία σχηματίζουν ορθογώνιο $A'B'\Gamma'\Delta'$ με πλευρές παράλληλες προς τους δρόμους και διαγώνιο την $A'\Gamma'$. Οι ταξιτζήδες παίρνουν εντολή από το κέντρο τους να κατευθυνθούν σε μια διασταύρωση P που βρίσκεται εντός του ορθογωνίου $A'B'\Gamma'\Delta'$ ακολουθώντας τον πιο σύντομο δρόμο. Αν ο Αντώνης διήνυσε 10α μέτρα, ο Βασίλης 20α μέτρα και ο Γιώργος 50α μέτρα, να βρείτε την απόσταση που διήνυσε ο Δημήτρης για να φθάσει στο σημείο P .

Προτεινόμενη λύση:

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε την διασταύρωση P που βρίσκεται εντός του ορθογωνίου $A'B'Γ'D'$, τότε από τα δεδομένα του προβλήματος θα πάρουμε:

$$\text{Αντώνης: } x + y = 10a$$

$$\text{Βασίλης: } y + \omega = 20a$$

$$\text{Γιώργος: } z + \omega = 50a$$

Προσθέτοντας τις παραπάνω εξισώσεις θα πάρουμε:

$$z + x + 2(y + \omega) = 80a \Leftrightarrow z + x = 40a.$$

Άρα ο Δημήτρης διήνυσε $40a$ για να φθάσει στο σημείο P .

