



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2012

Ημερομηνία: 10/11/2012

Ώρα εξέτασης: 10:00 -12:00

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Α' Λυκείου

Πρόβλημα 1 : Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού α , ώστε το κλάσμα

$$K = \frac{2x^2 + x + 2\alpha x + \alpha}{x-2} \text{ να απλοποιείται και στη συνέχεια να απλοποιήσετε το } K \text{ για την τιμή του } \alpha \text{ που βρήκατε.}$$

Προτεινόμενη Λύση

$$\text{Είναι } K = \frac{2x^2 + x + 2\alpha x + \alpha}{x-2} = \frac{(x+\alpha)(2x+1)}{(x-2)}, \text{ οπότε απλοποιείται όταν } \alpha = -2.$$

$$\text{Για } \alpha = -2, K = \frac{(x-2)(2x+1)}{(x-2)} = 2x + 1.$$

Πρόβλημα 2 : (α) Να αποδείξετε ότι $\mu^4 + 4\lambda^4 = (\mu^2 + 2\lambda^2 - 2\mu\lambda)(\mu^2 + 2\lambda^2 + 2\mu\lambda)$.

(β) Να βρείτε τους φυσικούς αριθμούς μ, λ , έτσι ώστε ο αριθμός

$$A = \mu^4 + 4\lambda^4 \text{ να είναι πρώτος.}$$

Προτεινόμενη Λύση

(α) Με πράξεις από το 2^ο μέλος....

(β) Ο αριθμός $A = \mu^4 + 4\lambda^4 = (\mu^2 + 2\lambda^2 - 2\mu\lambda)(\mu^2 + 2\lambda^2 + 2\mu\lambda)$. Για να είναι πρώτος σημαίνει ότι πρέπει ο μικρότερος παράγοντας να είναι ο αριθμός 1, άρα

$$\mu^2 + 2\lambda^2 - 2\mu\lambda = 1 \Leftrightarrow (\mu - \lambda)^2 + \lambda^2 = 1 \text{ ή } (\mu + \lambda)^2 + \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\mu = \lambda = 1 \text{ και τότε } A = \mu^4 + 4\lambda^4 = 5, \text{ που είναι πρώτος.}$$

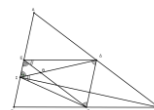
Πρόβλημα 3 : Δίνεται τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$. Έστω E, Z, Δ τα μέσα των πλευρών του $AB, B\Gamma$ και AG αντίστοιχα. Αν $\Gamma\Sigma$ το ύψος του τριγώνου να αποδείξετε ότι:
 (α) Τα τρίγωνα $\triangle DEZ$ και $\triangle \Delta\Sigma Z$ είναι ίσα και
 (β) Η μεσοκάθετη του τμήματος $E\Sigma$ περνά από το σημείο τομής των τμημάτων $\Sigma\Delta$ και EZ .

Προτεινόμενη Λύση

(α) Από το ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle B\Sigma\Gamma$, επειδή η ΣZ είναι διάμεσός του έχουμε: $\Sigma Z = \frac{B\Gamma}{2} = \Gamma Z$. Επίσης,

αφού E, Δ τα μέσα των πλευρών του AB και AG , έχουμε: $E\Delta \parallel \Gamma Z$. Άρα $\Sigma Z = E\Delta$ (1).

Από το ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle A\Sigma\Gamma$, επειδή η $\Sigma\Delta$ είναι διάμεσός του έχουμε: $\Sigma\Delta = \frac{A\Gamma}{2} = \Gamma\Delta$.



Επίσης, αφού E, Z τα μέσα των πλευρών του AB και $B\Gamma$, έχουμε: $EZ \parallel \Gamma\Delta$. Άρα $EZ = \Sigma\Delta$ (2).

Από τις (1) και (2) παίρνουμε ότι τα τρίγωνα $\triangle DEZ$ και $\triangle \Delta\Sigma Z$ είναι ίσα.

(β) Έστω Θ το σημείο τομής των τμημάτων $\Sigma\Delta$ και EZ .

Από την παραλληλία των EZ και $A\Delta$ και των AB και ΔZ , παίρνουμε:

$$\angle BEZ = \angle EAG \text{ και } \angle \Delta\Sigma E = \angle \Sigma\Delta Z \text{ (3)}$$

Από τα ίσα τρίγωνα $\triangle DEZ$ και $\triangle \Delta\Sigma Z$, έχουμε $\angle \Sigma\Delta Z = \angle EZ\Delta$ και από το παραλληλόγραμμο $EZ\Delta A$ παίρνουμε $\angle EZ\Delta = \angle EAG$. Από τις τελευταίες ισότητες γωνιών και τις (3) θα έχουμε: $\angle BEZ = \angle \Delta\Sigma E$ και επομένως το Θ είναι πάνω στην μεσοκάθετη του τμήματος $E\Sigma$.

Πρόβλημα 4 : Αν x, y, z είναι πραγματικοί αριθμοί με $x \neq y \neq z \neq x$ και $x^2 - y = y^2 - z = z^2 - x$,

(α) να αποδείξετε ότι $(x + y)(y + z)(z + x) = 1$

(β) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = (x + y + 1)(y + z + 1)(z + x + 1)$$

Προτεινόμενη Λύση

$$(α) \quad x^2 - y = y^2 - z \Leftrightarrow (x - y)(x + y) = y - z \Leftrightarrow x + y = \frac{y - z}{x - y}$$

Όμοια $y + z = \frac{z - x}{y - z}$ και $z + x = \frac{x - y}{z - x}$. Με πολλαπλασιασμό παίρνουμε

$$(x + y)(y + z)(z + x) = 1.$$

$$(β) \quad x + y + 1 = \frac{y - z}{x - y} + 1 = \frac{x - z}{x - y}. \text{ Ανάλογα } y + z + 1 = \frac{z - x}{y - z} + 1 = \frac{y - x}{y - z} \text{ και}$$

$$z + x + 1 = \frac{x - y}{z - x} + 1 = \frac{z - y}{z - x}.$$

Και πάλι με πολλαπλασιασμό παίρνουμε

$$A = (x + y + 1)(y + z + 1)(z + x + 1) = -1$$