



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 7/12/13

Ωρα εξέτασης: 09:30 -12:30

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΘΕΜΑΤΑ

Πρόβλημα 1:

(α) Αν κ θετικός ακέραιος, να δείξετε ότι : $2(\sqrt{\kappa+1} - \sqrt{\kappa}) < \frac{1}{\sqrt{\kappa}} < 2(\sqrt{\kappa} - \sqrt{\kappa-1})$

(β) Να αποδείξετε ότι : $18 < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}} < 19$

Προτεινόμενη λύση:

(α) Έχουμε διαδοχικά:

$$2(\sqrt{\kappa+1} - \sqrt{\kappa}) = \frac{2(\sqrt{\kappa+1}-\sqrt{\kappa})(\sqrt{\kappa+1}+\sqrt{\kappa})}{\sqrt{\kappa+1}+\sqrt{\kappa}} = \frac{2(\kappa+1-\kappa)}{\sqrt{\kappa+1}+\sqrt{\kappa}} = \frac{2}{\sqrt{\kappa+1}+\sqrt{\kappa}} < \frac{2}{\sqrt{\kappa}+\sqrt{\kappa}} = \frac{2}{2\sqrt{\kappa}} = \frac{1}{\sqrt{\kappa}}$$

$$2(\sqrt{\kappa} - \sqrt{\kappa-1}) = \frac{2(\sqrt{\kappa}-\sqrt{\kappa-1})(\sqrt{\kappa}+\sqrt{\kappa-1})}{\sqrt{\kappa}+\sqrt{\kappa-1}} = \frac{2(\kappa-\kappa+1)}{\sqrt{\kappa}+\sqrt{\kappa-1}} = \frac{2}{\sqrt{\kappa}+\sqrt{\kappa-1}} > \frac{2}{\sqrt{\kappa}+\sqrt{\kappa}} = \frac{2}{2\sqrt{\kappa}} = \frac{1}{\sqrt{\kappa}}$$

(β) Από το (α) έχουμε :

$$\frac{1}{\sqrt{1}} > 2(\sqrt{2} - \sqrt{1}), \frac{1}{\sqrt{2}} > 2(\sqrt{3} - \sqrt{2}), \frac{1}{\sqrt{3}} > 2(\sqrt{4} - \sqrt{3}), \dots, \frac{1}{\sqrt{97}} > 2(\sqrt{98} - \sqrt{97}),$$

$$\frac{1}{\sqrt{98}} > 2(\sqrt{99} - \sqrt{98}), \frac{1}{\sqrt{99}} > 2(\sqrt{100} - \sqrt{99})$$

Αθροίζοντας κατά μέλη τα πιο πάνω έχουμε:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}} > 2\sqrt{100} - 2 = 20 - 2 = 18$$

Ακολουθώς παίρνουμε από το (α):

$$\frac{1}{\sqrt{1}} = 1, \frac{1}{\sqrt{2}} < 2(\sqrt{2} - \sqrt{1}), \frac{1}{\sqrt{3}} < 2(\sqrt{3} - \sqrt{2}), \dots, \frac{1}{\sqrt{97}} < 2(\sqrt{97} - \sqrt{96}),$$

$$\frac{1}{\sqrt{98}} < 2(\sqrt{98} - \sqrt{97}), \frac{1}{\sqrt{99}} < 2(\sqrt{99} - \sqrt{98})$$

Αθροίζοντας κατά μέλη τα πιο πάνω έχουμε:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}} < 1 + 2\sqrt{99} - 2 = 2\sqrt{99} - 1 < 19$$

Πρόβλημα 2:

- (α) Αν ένας αριθμός x αυξηθεί κατά $y\%$ γίνεται 30, ενώ αν αυξηθεί ο y κατά $x\%$ γίνεται 25. Να βρείτε τους αριθμούς x και y .
- (β) Δίνεται η αλγεβρική παράσταση $\varphi(x) = (x+5)(x+7)(x+9)(x+11) + v$, με $x \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{N}$. Να υπολογίσετε το φυσικό αριθμό v , ώστε η αλγεβρική παράσταση να είναι τέλειο τετράγωνο.

Προτεινόμενη λύση:

- (α) Από τα δεδομένα έχουμε :

$$\begin{cases} x + \frac{xy}{100} = 30 & (1) \\ y + \frac{xy}{100} = 25 & (2) \end{cases}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε :

$$x - y = 5 \Leftrightarrow x = y + 5 \quad (3)$$

Αντικαθιστώντας την (3) στην (1) :

$$y + 5 + \frac{(y+5)y}{100} = 30 \Leftrightarrow y^2 + 105y - 2500 = 0 \Leftrightarrow (y + 125)(y - 20) = 0 \Leftrightarrow y = -125, y = 20$$

Για $y = -125$ έχουμε $x = -120$, λύση που προφανώς δεν μπορεί να γίνει δεκτή.

Για $y = 20$ έχουμε $x = 25$.

- (β) Έχουμε :

$$\varphi(x) = (x+5)(x+7)(x+9)(x+11) + v = (x^2 + 16x + 55)(x^2 + 16x + 63) + v$$

Αν θέσουμε $y = x^2 + 16x + 55$, τότε :

$$\varphi(x) = y(y+8) + v = y^2 + 8y + v = (y+4)^2 - 16 + v$$

Η αλγεβρική παράσταση $\varphi(x)$ είναι τέλειο τετράγωνο αν $v = 16$.

Πρόβλημα 3:

Για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει : $x + y = 6$

(α) Να δείξετε ότι : $xy \leq 9$

(β) Να αποδείξετε ότι : $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 \geq \frac{200}{9}$

Προτεινόμενη λύση:

(α) Ισχύει : $x + y = 6 \Leftrightarrow y = 6 - x$. Συνεπώς :

$xy = x(6 - x) = 6x - x^2 = -(x^2 - 6x) = -(x - 3)^2 + 9 \leq 9$, αφού $(x - 3)^2 \geq 0$ για όλους τους πραγματικούς x .

(β) Έχουμε : $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} + y^2 + 2 + \frac{1}{y^2} = (x + y)^2 - 2xy + \frac{x^2 + y^2}{(xy)^2} + 4$

$xy \leq 9 \Leftrightarrow -2xy \geq -18 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy \geq 6^2 - 18 = 18$ και $\frac{1}{xy} \geq \frac{1}{9} \Leftrightarrow \frac{1}{(xy)^2} \geq \frac{1}{81}$ για όλους τους θετικούς πραγματικούς x και y .

Άρα :

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 \geq 40 - 18 + \frac{36 - 18}{81} = 22 + \frac{2}{9} = \frac{198 + 2}{9} = \frac{200}{9}$$

Πρόβλημα 4:

Στο ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$, το M είναι μέσο του AB , το N είναι μέσο του MB και το Λ είναι σημείο πάνω στην $B\Gamma$, έτσι ώστε $(\Lambda B) = (BN) = \frac{1}{5}(\Gamma\Lambda)$. Αν K είναι το σημείο τομής της $M\Lambda$ και DN και το εμβαδόν του τριγώνου MNK είναι 1, να υπολογίσετε το εμβαδόν του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$.

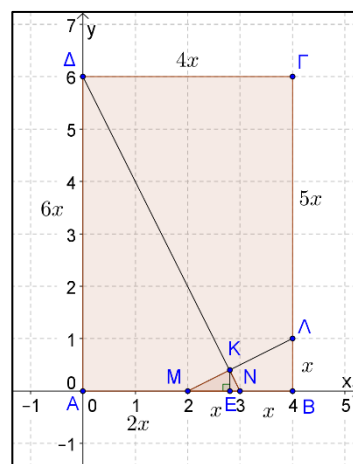
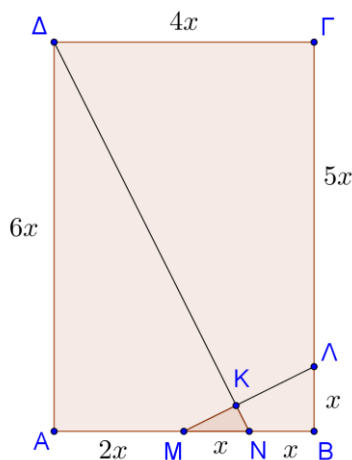
Προτεινόμενη λύση:

Αν προσαρμόσουμε το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ κατάλληλα (επιλέγοντας το $x = 1$) σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων έχουμε :

$$\lambda_{DN} = \frac{0-6}{3-0} = -2 \text{ και } \lambda_{M\Lambda} = \frac{1-0}{4-2} = \frac{1}{2}$$

Συνεπώς :

$$(\Delta N) : y = -2x + 6 \quad (1)$$



$$(ML) : y = \frac{1}{2}x - 1 \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) έχουμε για το σημείο K ότι :

$$-2x + 6 = \frac{1}{2}x - 1 \Leftrightarrow \frac{5}{2}x = 7 \Leftrightarrow x = \frac{14}{5} \text{ και } y = -\frac{28}{5} + 6 = \frac{2}{5}$$

Άρα $KE = 0,4$ μονάδες και $x = 1$ μονάδα, γεγονός που μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το εμβαδόν του τριγώνου MNK είναι $0,2$ τετραγωνικές μονάδες, 5 φορές μικρότερο από ότι το «πραγματικό».

Συμπεραίνουμε ότι το «πραγματικό» εμβαδόν του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ θα είναι 5 φορές μεγαλύτερο από ότι το $6 \cdot 4 = 24$ τετραγωνικές μονάδες, δηλαδή $24 \cdot 5 = 120$ τετραγωνικές μονάδες.