



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2013

Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 02/11/13

Ώρα εξέτασης: 10:00 -12:00

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα .Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΘΕΜΑΤΑ

1. Να λύσετε και να διερευνήσετε το σύστημα:

$$5x + (\mu + 1)y = 10$$

$$\mu x + 6y = 2\mu$$

Λύση:

$$\begin{cases} 5x + (\mu + 1)y = 10 \\ \mu x + 6y = 2\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + (\mu + 1)y = 10 \\ y = \frac{-\mu x + 2\mu}{6} \end{cases} \Leftrightarrow 5x + (\mu + 1) \frac{\mu(2 - x)}{6} = 10$$

$$\Leftrightarrow 30x + 2\mu(\mu + 1) - \mu(\mu + 1)x = 60 \Leftrightarrow -(\mu^2 + \mu - 30)x = -2\mu^2 - 2\mu + 60$$

$$\Leftrightarrow (\mu + 6)(\mu - 5)x = 2(\mu + 6)(\mu - 5)$$

Αν $\mu \neq -6$ ή 5 , τότε $x = 2$ και $y = 0$.

Αν $\mu = -6$ ή 5 , τότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής $(x, x - 2)$ και $(x, \frac{10-5x}{6})$ αντίστοιχα.

2. Να δείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό a ισχύει:

$$3a^4 \geq 4a^3 - 4a^2$$

Λύση:

Ισοδύναμα έχουμε:

$$3a^4 - 4a^3 + 4a^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 \cdot (3a^2 - 4a + 4) \geq 0 \Leftrightarrow a^2 \cdot (2a^2 + a^2 - 4a + 4) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 \cdot [2a^2 + (a - 2)^2] \geq 0$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό a , αφού

$$a^2 \geq 0 \text{ και } 2a^2 + (a - 2)^2 > 0.$$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2ax^2 + 3\gamma$ η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$-3 \leq f(1) \leq -2 \text{ και } -5 \leq f(2) \leq 7$$

Να δείξετε ότι: $-10 \leq f(-3) \leq \frac{71}{3}$

Λύση:

Έχουμε $f(1) = 2a + 3\gamma$ και $f(2) = 8a + 3\gamma$. Άρα:

$$f(2) - f(1) = 6a \Rightarrow a = \frac{1}{6}[f(2) - f(1)]$$

$$f(1) = 2 \cdot \frac{1}{6}[f(2) - f(1)] + 3\gamma \Rightarrow \gamma = -\frac{1}{9}[f(2) - 4f(1)]$$

Συνεπώς:

$$f(-3) = 18a + 3\gamma = \dots = \frac{8}{3}f(2) - \frac{5}{3}f(1)$$

Αφού:

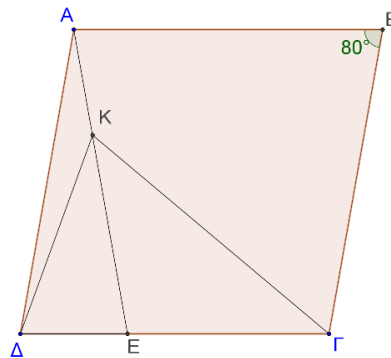
$$-5 \leq f(2) \leq 7 \Rightarrow -\frac{40}{3} \leq \frac{8}{3}f(2) \leq \frac{56}{3}$$

$$-3 \leq f(1) \leq -2 \Rightarrow \frac{10}{3} \leq -\frac{5}{3}f(1) \leq 5$$

Τελικά:

$$-10 \leq f(-3) \leq \frac{71}{3}$$

4. Στο πιο κάτω σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος και η γωνιά $\hat{B} = 80^\circ$. Αν $AD = AE$ και $AK = DE$, να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $\widehat{\Gamma K \Delta}$.



Λύση:

Φέρουμε τη BK . Τα τρίγωνα $\triangle ADE$ και $\triangle ABK$ είναι ίσα, αφού $DE = AK$, $AD = AB$ και $\widehat{ADE} = \widehat{KAB} = 80^\circ$ ($AD = AE$, $\widehat{ADE}, \widehat{KAB}$ εντός εναλλάξ γωνίες).

Λόγω της ισότητας των πιο πάνω ισοσκελών τριγώνων, έχουμε:

$$\widehat{ADE} = \widehat{AED} = \widehat{KAB} = \widehat{BKA} = 80^\circ \Rightarrow \widehat{ABK} = 20^\circ \text{ και } \widehat{KBT} = 60^\circ$$

Το τρίγωνο $\triangle BKT$ είναι ισόπλευρο, αφού $BK = BT \Rightarrow \widehat{BKT} = \widehat{BTK} = 60^\circ$.

Συνεπώς, $\widehat{KTE} = 40^\circ$ και αφού $\Gamma\Delta = \Gamma K$, έχουμε $\widehat{\Gamma K \Delta} = \widehat{\Gamma \Delta K} = 70^\circ$.

