



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 6/12/14

Ωρα εξέτασης: 09:30 -12:30

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

Πρόβλημα 1: Να βρείτε τις τιμές $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε το πολυώνυμο

$$P(x) = ax^3 + \beta x^2 + \gamma x + 12$$

να διαιρείται με το $(x-2)^2$, όπου $\gamma \in \mathbb{R}$ είναι η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει η μεταβλητή x για την συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 - 64} + \sqrt{-x - 8}$.

Προτεινόμενη λύση:

Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 - 64} + \sqrt{-x - 8}$ ορίζεται για

$$\begin{cases} x^2 - 64 \geq 0 \\ -x - 8 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -8 \text{ ή } x \geq 8 \\ x \leq -8 \end{cases}$$

Επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι $D(f) = (-\infty, -8]$ και άρα $\gamma = -8$.

Το πολυώνυμο $P(x)$ γράφεται

$$\begin{aligned} P(x) &= ax^3 + \beta x^2 + \gamma x + 12 = a((x-2) + 2)^3 + \beta((x-2) + 2)^2 + \gamma((x-2) + 2) + 12 \\ &= a(x-2)^3 + (6a + \beta)(x-2)^2 + (12a + 4\beta - 8)(x-2) + 8a + 4\beta - 4 \end{aligned}$$

Επομένως για να διαιρείται το $P(x)$ με το $(x-2)^2$ θα πρέπει

$$(12a + 4\beta - 8)(x-2) + 8a + 4\beta - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 12a + 4\beta - 8 = 0 \\ -16a - 4\beta + 12 = 0 \end{cases}$$

Λύνοντας το σύστημα παίρνουμε $\alpha = 1$ και $\beta = -1$.

Πρόβλημα 2: Δίνεται τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (κ) . Στην προέκταση της πλευράς $B\Gamma$ παίρνουμε σημεία B_1 και Γ_1 τέτοια ώστε $BB_1 = AB$ και $\Gamma\Gamma_1 = A\Gamma$. Έστω (κ_1) ο κύκλος με κέντρο O που διέρχεται από τα σημεία A, B_1 και Γ_1 . Αν M το δεύτερο σημείο τομής της AO με τον κύκλο (κ) , να αποδείξετε ότι το σημείο M είναι το μέσον του τόξου $\widehat{B\Gamma}$.

Προτεινόμενη λύση:

Για να αποδείξουμε ότι το σημείο M είναι μέσον του τόξου $B\Gamma$, αρκεί να δείξουμε ότι $\angle BAO = \angle OAG$. Για την πρώτη γωνία έχουμε:

$$\angle BAO = \angle B_1AO - \angle B_1AB \quad (1)$$

Όμως από το ισοσκελές τρίγωνο $\triangle B_1AO$ παίρνουμε

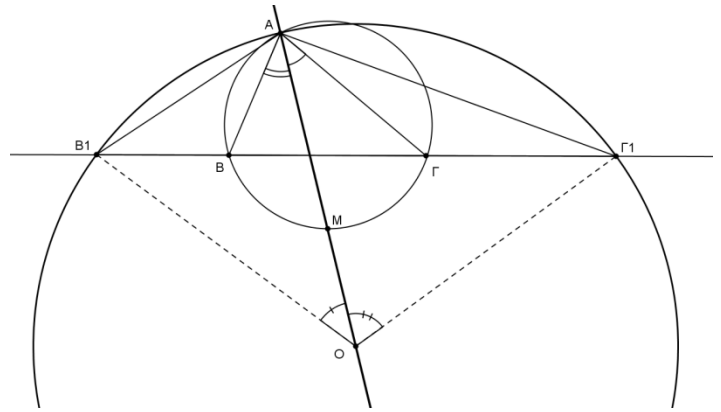
$$2\angle B_1AO + \angle B_1OA = 180^\circ \Rightarrow \angle B_1AO = 90^\circ - \frac{\angle B_1OA}{2}$$

Επίσης, από το ισοσκελές τρίγωνο ΔB_1BA έχουμε ότι $\angle B_1AB = \angle AB_1B$. Όμως η τελευταία γωνία είναι εγγεγραμμένη στο τόξο AG_1 και άρα ισούται με το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας που βαίνει στο ίδιο τόξο, δηλαδή

$$\angle AB_1B = \frac{\angle AOG_1}{2}$$

Επομένως η (1) γράφεται

$$\angle BAO = 90^\circ - \frac{\angle B_1OA}{2} - \frac{\angle AOG_1}{2} \quad (2)$$



Όμοια για την γωνία $\angle OAG$ έχουμε $\angle OAG = \angle G_1AO - \angle GAG_1$ (3). Από το ισοσκελές τρίγωνο ΔG_1AO παίρνουμε

$$2\angle G_1AO + \angle G_1OA = 180^\circ \Rightarrow \angle G_1AO = 90^\circ - \frac{\angle G_1OA}{2}$$

Επίσης, από το ισοσκελές τρίγωνο ΔG_1GA έχουμε ότι $\angle G_1AG = \angle AG_1G$. Επομένως

$$\angle AG_1G = \frac{\angle AOB_1}{2}$$

Άρα (3) γράφεται

$$\angle OAG = 90^\circ - \frac{\angle G_1OA}{2} - \frac{\angle AOB_1}{2} \quad (4)$$

Από τις (2) και (4) θα έχουμε $\angle BAO = \angle OAG$ και άρα το σημείο M είναι το μέσον του τόξου $\widehat{BG}$.

Πρόβλημα 3: Δίνονται τα κλάσματα

$$A = \frac{\beta + \gamma}{\alpha}, \quad B = \frac{\gamma + \alpha}{\beta}, \quad \Gamma = \frac{\alpha + \beta}{\gamma}$$

με α, β, γ να είναι θετικοί ακέραιοι και $\gamma \leq \beta \leq \alpha$. Να βρείτε όλες τις τριάδες (α, β, γ) για τις οποίες τα κλάσματα A, B, Γ είναι όλα ακέραιοι αριθμοί.

Προτεινόμενη λύση:

Για να είναι τα κλάσματα A, B, Γ είναι όλα ακέραιοι αριθμοί θα πρέπει να ισχύει $\beta + \gamma = \kappa\alpha$, $\gamma + \alpha = \lambda\beta$ και $\alpha + \beta = \mu\gamma$, για κάποιους $\kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{N}$. Από την δεδομένη ανισότητα $\gamma \leq \beta \leq \alpha$ θα πάρουμε

$$\beta \leq \alpha \text{ και } \gamma \leq \alpha \Rightarrow \beta + \gamma \leq 2\alpha \Rightarrow \kappa\alpha \leq 2\alpha \Rightarrow \kappa \leq 2 \Rightarrow \kappa \in \{1, 2\}$$

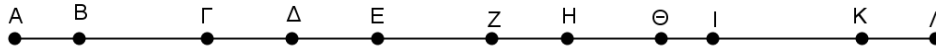
- Αν $\kappa = 2$ έχουμε: $\beta + \gamma = 2\alpha$ και αφού α, β, γ είναι θετικοί ακέραιοι με $\beta \leq \alpha$ και $\gamma \leq \alpha$ θα πρέπει να ισχύει $\beta = \gamma = \alpha$ για να επαληθεύεται η ισότητα. Επομένως αν $\alpha = \beta = \gamma = \rho \in \mathbb{N}$ η τριάδα $(\alpha, \beta, \gamma) = (\rho, \rho, \rho)$ με $\rho \in \mathbb{N}$, είναι μια λύση.
- Αν $\kappa = 1$ παίρνουμε: $\beta + \gamma = \alpha$. Αφού όμως $\gamma + \alpha = \lambda\beta \Rightarrow \gamma + \beta + \gamma = \lambda\beta \Rightarrow 2\gamma = (\lambda - 1)\beta$, και επειδή $\beta \geq \gamma$ έχουμε $2\gamma = (\lambda - 1)\beta \geq (\lambda - 1)\gamma \Rightarrow \lambda - 1 \leq 2 \Rightarrow \lambda \leq 3 \Rightarrow \lambda \in \{1, 2, 3\}$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $\lambda = 1$ έχουμε $\gamma + \alpha = \beta$, άτοπο αφού α, β, γ είναι θετικοί ακέραιοι με $\beta \leq \alpha$.

- Αν $\lambda = 2$ παίρνουμε $\gamma + \alpha = 2\beta$ και αφού $\beta + \gamma = \alpha$, προσθέτοντας κατά μέλη τις τελευταίες ισότητες έχουμε $2\gamma + \alpha + \beta = \alpha + 2\beta \Rightarrow \beta = 2\gamma$ και $\alpha = \beta + \gamma = 3\gamma$. Τότε για $\gamma = \rho \in \mathbb{N}$ η τριάδα $(\alpha, \beta, \gamma) = (3\rho, 2\rho, \rho)$ με $\rho \in \mathbb{N}$, είναι μια λύση.
- Αν $\lambda = 3$ παίρνουμε $\gamma + \alpha = 3\beta$ και αφού $\beta + \gamma = \alpha$, προσθέτοντας κατά μέλη τις τελευταίες ισότητες έχουμε $2\gamma + \alpha + \beta = \alpha + 3\beta \Rightarrow \beta = \gamma$ και $\alpha = \beta + \gamma = 2\gamma$. Τότε για $\gamma = \rho \in \mathbb{N}$ η τριάδα $(\alpha, \beta, \gamma) = (2\rho, \rho, \rho)$ με $\rho \in \mathbb{N}$, είναι μια λύση.

Επομένως όλες οι λύσεις είναι οι τριάδες: $(\rho, \rho, \rho), (3\rho, 2\rho, \rho), (2\rho, \rho, \rho)$ με $\rho \in \mathbb{N}$.

Πρόβλημα 4: Μια σιδηροδρομική γραμμή χωρίζεται σε 10 τμήματα, από τους σταθμούς **A, B, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ, Ι, Κ και Λ**. Το συνολικό μήκος της γραμμής είναι 56 km. Κάθε ταξίδι δυο διαδοχικών τμημάτων της γραμμής δεν ξεπερνά τα 12 km, ενώ κάθε ταξίδι τριών διαδοχικών τμημάτων της γραμμής είναι τουλάχιστον 17 km. Να βρείτε την απόσταση μεταξύ των σταθμών **B και H**.



Προτεινόμενη λύση:

$$56 = A\Lambda = A\Delta + \Delta H + H\Theta + \Theta K + K\Lambda$$

Όμως, από την υπόθεση έχουμε ότι $A\Delta, \Delta H, H\Theta \geq 17$. Άρα η από την προηγούμενη ισότητα παίρνουμε $56 \geq 3 \cdot 17 + K\Lambda \Leftrightarrow K\Lambda \leq 5$.

Επίσης $\Theta\Lambda = \Theta K + K\Lambda \geq 17$. Όμως αφού από την υπόθεση έχουμε $\Theta K \leq 12$ (1) ή τελευταία ανισότητα μας δίνει $12 + K\Lambda \geq 17 \Leftrightarrow K\Lambda \geq 5$.

Από τα προηγούμενα συμπεραίνουμε ότι $K\Lambda = 5$ km και από αυτό $\Theta K + K\Lambda \geq 17 \Leftrightarrow \Theta K \geq 12$ (2). Από τις (1) και (2) έπεται ότι $\Theta K = 12$ km.

Με όμοιο τρόπο συμμετρικά βρίσκουμε ότι $AB = 5$ km και $B\Delta = 12$ km. Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω έχουμε

$$\Delta\Theta = A\Theta - AB - B\Delta - \Theta K - K\Lambda = 56 - 5 - 12 - 5 - 12 = 22 \text{ km.}$$

Από την υπόθεση έχουμε

$$H\Theta \geq 17 \Leftrightarrow \Theta K + H\Theta \geq 17 \Leftrightarrow 12 + H\Theta \geq 17 \Leftrightarrow H\Theta \geq 5$$

Αφού $\Delta H \geq 17$ και $\Delta\Theta = \Delta H + H\Theta \Leftrightarrow 22 \geq 17 + H\Theta \Leftrightarrow H\Theta \leq 5$. Από τις σχέσεις αυτές έχουμε ότι $H\Theta = 5$ km και $\Delta H = 17$ km.

Άρα τελικά

$$BH = B\Delta + \Delta H = 12 + 17 = 29 \text{ km.}$$