



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2014

Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 08/11/2014

Ώρα Εξέτασης: 10:00 -12:00

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με τα σημεία Δ και E να είναι τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

Αν $\overrightarrow{AD} = \vec{u}$ και $\overrightarrow{AE} = \vec{w}$ τότε

α) Να βρείτε το $\overrightarrow{B\Gamma}$ συναρτήσει των $\vec{u}$ και $\vec{w}$

Λύση:

Δ μέσο BA άρα $\overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{AD} = -2\overrightarrow{AD} = -2\vec{u}$

E μέσο $A\Gamma$ άρα $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AE} = 2\vec{w}$

$$\overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AG} = -2\vec{u} + 2\vec{w} = -2(\vec{u} - \vec{w})$$

β) Να δείξετε ότι $\overrightarrow{B\Gamma} = 2\overrightarrow{DE}$

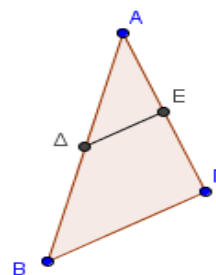
$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} = -\vec{u} + \vec{w} = -(\vec{u} - \vec{w})$$

$$\overrightarrow{B\Gamma} = -2(\vec{u} - \vec{w}) = 2\overrightarrow{DE}$$

γ) Να δείξετε ότι $B\Gamma \parallel DE$

θα πρέπει να δείξουμε ότι ισχύει $\overrightarrow{B\Gamma} = \kappa \overrightarrow{DE}$ για κάποια τιμή του κ .

από το ερώτημα β δείξαμε ότι $\overrightarrow{B\Gamma} = 2\overrightarrow{DE}$ άρα $B\Gamma \parallel DE$



ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

α) Να δείξετε ότι $\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} > 2$

$\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$ αφού είναι άθροισμα θετικών αριθμών

$$A = \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\left(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{2 + 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}} = \sqrt{4 + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{9}{2}}$$

$$B = 2 = \sqrt{\frac{8}{2}}, \text{ άρα } A > B$$

β) Να υπολογίσετε την παράσταση $\sqrt{\frac{27^{10}+9^{10}}{9^{10}+9^5}}$

$$\sqrt{\frac{27^{10}+9^{10}}{9^{10}+9^5}} = \sqrt{\frac{(3^3)^{10}+(3^2)^{10}}{(3^2)^{10}+(3^2)^5}} = \sqrt{\frac{3^{30}+3^{20}}{3^{20}+3^{10}}} = \sqrt{\frac{3^{20}(3^{10}+1)}{3^{10}(3^{10}+1)}} = \sqrt{\frac{3^{20}}{3^{10}}} = \sqrt{3^{10}} = 3^5$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Στο σχήμα οι ευθείες $B\Delta$, BA , και ΔE είναι εφαπτόμενες του κύκλου (K, KA) στα σημεία Γ , A και E αντίστοιχα. Να δείξετε:

α) $B\Gamma = BA$

Συγκρίνω τα τρίγωνα BAK , $B\Gamma K$

$\hat{B}\hat{A}K = \hat{B}\hat{\Gamma}K = 90^\circ$ (ακτίνα κάθετη στην εφαπτομένη)

$KA = K\Gamma$ ακτίνες

BK κοινή πλευρά

Τα τρίγωνα είναι ίσα γιατί είναι ορθογώνια με δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες άρα και οι τρίτες πλευρές αντίστοιχα ίσες μεταξύ τους δηλαδή $B\Gamma = BA$

Επίσης και οι αντίστοιχες γωνίες ίσες δηλαδή $\hat{K}_1 = \hat{K}_2$

β) $\hat{K}_3 = \hat{K}_4$

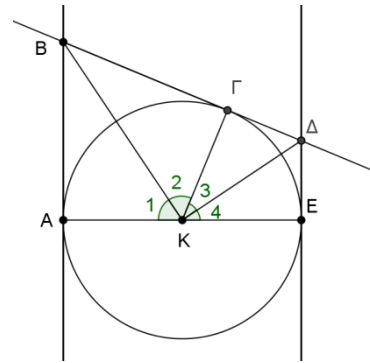
Συγκρίνω τα τρίγωνα $\Delta\Gamma K$, ΔEK

$\hat{\Delta}\hat{\Gamma}K = \hat{\Delta}\hat{E}K = 90^\circ$ ακτίνα κάθετη στην εφαπτομένη

$K\Gamma = KE$ ακτίνες

ΔK κοινή πλευρά

Τα τρίγωνα είναι ίσα γιατί είναι ορθογώνια με δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες άρα και οι αντίστοιχες γωνίες ίσες δηλαδή $\hat{K}_3 = \hat{K}_4$



γ) $BK \perp K\Delta$

$\hat{K}_1 + \hat{K}_2 + \hat{K}_3 + \hat{K}_4 = 180^\circ$ επίσης $\hat{K}_1 = \hat{K}_2$ και $\hat{K}_3 = \hat{K}_4$

Άρα

$\hat{K}_2 + \hat{K}_2 + \hat{K}_3 + \hat{K}_3 = 180^\circ \Rightarrow 2\hat{K}_2 + 2\hat{K}_3 = 180^\circ \Rightarrow \hat{K}_2 + \hat{K}_3 = 90^\circ$ έτσι $BK \perp K\Delta$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

α) Να δείξετε ότι $\frac{ay-a^2}{y^2-ay} = \frac{a}{y}$ όπου $a \in \mathbb{N}$ και $y \notin N_0$

$$\frac{ay-a^2}{y^2-ay} = \frac{a(y-a)}{y(y-a)} = \frac{a}{y}$$

β) Αν ισχύει ότι $1 + 2 + 3 + \dots + a = y$

να δείξετε ότι $\frac{y-1}{y^2-y} + \frac{2y-4}{y^2-2y} + \frac{3y-9}{y^2-3y} + \dots + \frac{ay-a^2}{y^2-ay} = 1$

$$\frac{y-1}{y^2-y} + \frac{2y-4}{y^2-2y} + \frac{3y-9}{y^2-3y} + \dots + \frac{ay-a^2}{y^2-ay}$$

Από το ερώτημα α προκύπτει

$$\frac{1}{y} + \frac{2}{y} + \frac{3}{y} + \dots + \frac{a}{y} = \frac{1+2+3+\dots+a}{y} = \frac{y}{y} = 1$$