



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 12/12/15

Ωρα εξέτασης: 09:30 -12:30

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Πρόβλημα 1: Δίνονται οι παραστάσεις

$$A(x) = \sqrt{\sin^4 x + 2\eta\mu^2 x - 1}$$

και

$$B(x) = \sqrt{\sin^4 x + 4\eta\mu^2 x} - \sqrt{\sin^4 x + 2\eta\mu^2 x - 1}$$

Να αποδείξετε ότι:

- α) $A(x) = 1 - \sin^2 x$
- β) $0 \leq \sqrt{\sin^4 x + 2\eta\mu^2 x - 1} \leq 1$
- γ) $B(x) = 1$

Λύση:

α) Η παράσταση A γράφεται

$$\begin{aligned} A(x) &= \sqrt{\sin^4 x + 2\eta\mu^2 x - 1} = \sqrt{\sin^4 x + 2(1 - \sin^2 x) - 1} = \sqrt{\sin^4 x + 2 - 2\sin^2 x - 1} \\ &= \sqrt{\sin^4 x - 2\sin^2 x + 1} = \sqrt{(\sin^2 x - 1)^2} = |\sin^2 x - 1| \end{aligned}$$

Επειδή όμως $-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow \sin^2 x - 1 \leq 0$ θα πάρουμε

$$A(x) = |\sin^2 x - 1| = 1 - \sin^2 x$$

β) Θα έχουμε

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \sin^2 x \leq 1 \quad \text{ή} \quad -1 \leq -\sin^2 x \leq 0 \quad \text{ή} \quad 0 \leq 1 - \sin^2 x \leq 1 \quad \text{ή}$$

$$0 \leq A(x) \leq 1 \quad \text{ή} \quad 0 \leq \sqrt{\sin^4 x + 2\eta\mu^2 x - 1} \leq 1$$

γ)

$$\begin{aligned} B(x) &= \sqrt{\sin^4 x + 4\eta\mu^2 x} - \sqrt{\sin^4 x + 2\eta\mu^2 x - 1} \\ &= \sqrt{\sin^4 x + 4(1 - \sin^2 x)} - (1 - \sin^2 x) \\ &= \sqrt{\sin^4 x - 4\sin^2 x + 4} - (1 - \sin^2 x) = \sqrt{(\sin^2 x - 2)^2} - (1 - \sin^2 x) \\ &= |\sin^2 x - 2| - (1 - \sin^2 x) = -\sin^2 x + 2 - 1 + \sin^2 x = 1. \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2: Να βρείτε όλους τους θετικούς ακέραιους αριθμούς N έτσι ώστε το N^2 να είναι πενταψήφιος αριθμός και το 54 να διαιρεί το N^2 .

Λύση:

Θα έχουμε ότι

$$N^2 = 54\kappa, \quad \kappa \in \mathbb{N}$$

Αναλύοντας το 54 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων θα έχουμε

$$N^2 = 2 \cdot 3^3 \kappa$$

Για να είναι το δεύτερο μέρος τέλει τετράγωνο θα πρέπει να έχουμε $\kappa = 2 \cdot 3 \cdot \rho^2$, $\rho \in \mathbb{N}$.

Τότε

$$N^2 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot \rho^2 \quad \text{ή} \quad N = 2 \cdot 3^2 \cdot \rho \quad \text{ή} \quad N = 18\rho.$$

Αφού όμως το N^2 είναι πενταψήφιος αριθμός θα πάρουμε

$$10^4 < N^2 < 10^5 \quad \text{ή} \quad 10^2 < N < 10^2 \sqrt{10}$$

Αντικαθιστώντας το $N = 18\rho$ θα έχουμε

$$10^2 < 18\rho < 10^2 \sqrt{10} \quad \text{ή} \quad \frac{100}{18} < \rho < \frac{100}{18} \sqrt{10}$$

Επειδή $\rho \in \mathbb{N}$ θα έχουμε

$$6 \leq \rho \leq 17$$

Επομένως το ρ παίρνει τιμές $\rho = 6, 7, 8, \dots, 17$ και άρα

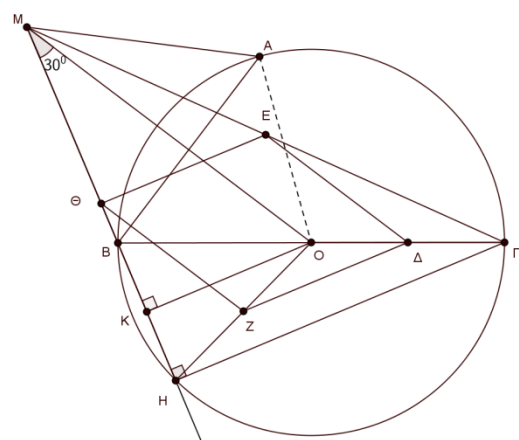
$$N = 18\rho \Rightarrow N = 18 \cdot 6, 18 \cdot 7, \dots, 18 \cdot 17$$

Πρόβλημα 3: Σε κύκλο (O, R) η $B\Gamma$ είναι διάμετρος και το A τυχαίο σημείο του κύκλου. Με πλευρά AB κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο AMB , εκτός του κύκλου και φέρουμε την $GH \perp MB$.

(α) Να δείξετε ότι $OM = GH$.

(β) Αν Δ, E, Θ και Z τα μέσα του OG, GM, MH και OH , αντίστοιχα να δείξετε ότι το $\Delta E \Theta Z$ είναι ρόμβος.

Λύση:



Κατ' αρχήν η OM είναι μεσοκάθετος του AB , διότι $OA = OB = R$ και $MA = MB$. Άρα $\angle OMK = 30^\circ$

Το σημείο H ανήκει στον κύκλο, αφού η $B\Gamma$ είναι διάμετρος.

(α) Φέρουμε το απόστημα OK της χορδής BH και τότε το K είναι το μέσον της BH .

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔOKM είναι $OK = \frac{OM}{2}$: (1).

Στο τρίγωνο $\Delta BH\Gamma$, το K είναι το μέσον της BH και το O είναι το μέσον της $B\Gamma$. Άρα $OK = \frac{\Gamma H}{2}$: (2).

Από (1), (2) έχουμε $OM = \Gamma H$.

(β) Στο τρίγωνο $\Delta MH\Gamma$, το Θ είναι το μέσον της MH και το E είναι το μέσον της GM , άρα $\Theta E = \parallel \frac{\Gamma H}{2}$: (3). Στο τρίγωνο $\Delta OH\Gamma$ το Z είναι το μέσον της OH και το Δ είναι το μέσον της OG , άρα $Z\Delta = \parallel \frac{\Gamma H}{2}$: (4). Από (3), (4) έχουμε $\Theta E = \parallel Z\Delta$, άρα

το $\Delta E\Theta Z$ είναι παραλληλόγραμμο. Τέλος, στο τρίγωνο ΔMOH , το Θ είναι το μέσον της MH και το Z είναι το μέσον της OH , άρα $\Theta Z = \frac{OM}{2} = \frac{GH}{2} = Z\Delta$. Συνεπώς το $\Delta E\Theta Z$ είναι ρόμβος.

Πρόβλημα 4: Οι μαθητές μιάς τάξης Λυκείου ρώτησαν τον καθηγητή τους των Μαθηματικών να τους πεί τις ηλικίες των τριών παιδιών του. Εκείνος τους απάντησε ως εξής:

«Το γινόμενο του πενταπλάσιου της ηλικίας του μικρότερου παιδιού μου επί το τετράγωνο του τριπλάσιου της ηλικίας του μεσαίου παιδιού μου ισούται με τον κύβο του διπλάσιου της ηλικίας του μεγαλύτερου παιδιού μου. Ακόμα το γινόμενο των ηλικιών και των τριών παιδιών μου είναι μικρότερο του 1000».

Να βρείτε τις ηλικίες των παιδιών του καθηγητή.

Λύση:

Αν ονομάσουμε x την ηλικία του μικρότερου παιδιού, y την ηλικία του μεσαίου παιδιού και z την ηλικία του μεγαλύτερου παιδιού τότε από τα δεδομένα του προβλήματος θα έχουμε:

$$\begin{cases} (5x)(3y)^2 = (2z)^3 & (1) \\ xyz < 1000 & (2) \end{cases}$$

Από την (1) θα έχουμε

$$(5x)(3y)^2 = (2z)^3 \Leftrightarrow 45xy^2 = 8z^3 \Leftrightarrow 3^2 \cdot 5xy^2 = 2^3z^3$$

Άρα από την τελευταία θα έχουμε ότι

$$15/z \text{ ή } z = 15t, \quad t \in \mathbb{N}$$

Πολλαπλασιάζουμε την (1) με xz^2 και έχουμε

$$3^2 \cdot 5xy^2 \cdot (xz^2) = 2^3z^3 \cdot (xz^2) \Leftrightarrow 3^2 \cdot 5x^2y^2z^2 = 2^3xz^5$$

Επειδή $z = 15t$ η τελευταία εξίσωση γίνεται

$$3^2 \cdot 5x^2y^2z^2 = 2^3xz^5 \Leftrightarrow 3^2 \cdot 5x^2y^2z^2 = 2^3x \cdot 3^5 \cdot 5^5t^5 \Leftrightarrow x^2y^2z^2 = 2^3x \cdot 3^3 \cdot 5^4t^5 \quad (3)$$

Από την (2) θα έχουμε

$$xyz < 1000 \Leftrightarrow x^2y^2z^2 < 2^6 \cdot 5^6 \quad (4)$$

Η (4) λόγω της (3) γίνεται

$$2^3x \cdot 3^3 \cdot 5^4t^5 < 2^6 \cdot 5^6 \Leftrightarrow 27xt^5 < 200 \quad (5)$$

- Αν $t \geq 2$ αφού $x \geq 1$ θα έχουμε

$$xt^5 \geq 2^5 \text{ ή } 27xt^5 \geq 27 \cdot 2^5 > 200$$

άτοπο λόγω της (5).

- Επομένως $t < 2$, και αφού $t \in \mathbb{N}$ θα πάρουμε $t = 1$.

Άρα, $z = 15t \Leftrightarrow z = 15$. Από την (5) παίρνουμε

$$27xt^5 < 200 \Leftrightarrow x < \frac{200}{27} \text{ δηλαδή } x \leq 7$$

Δηλαδή $x \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$.

Αντικαθιστώντας $z = 15$ στην (1) θα έχουμε

$$3^2 \cdot 5xy^2 = 2^3z^3 \Leftrightarrow 3^2 \cdot 5xy^2 = 2^33^35^3 \Leftrightarrow xy^2 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$$

Δοκιμάζοντας τις τιμές $x \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$ η μόνη περίπτωση ο y να είναι θετικός ακέραιος είναι όταν $x = 6$ και τότε $6y^2 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \Leftrightarrow y^2 = 2^2 \cdot 5^2 \Leftrightarrow y = 10$

Άρα οι ηλικίες των παιδιών του καθηγητή θα είναι

$$(x, y, z) = (6, 10, 15)$$