



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2015

Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 07/11/2015

Ώρα Εξέτασης: 10:00-12:00

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Πρόβλημα 1

α) Να δείξετε ότι για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό a ισχύει ότι: $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}} = \sqrt{a+1} - \sqrt{a}$.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης A .

$$A = \frac{1}{3 + \sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{10} + \sqrt{11}} + \frac{1}{\sqrt{11} + \sqrt{12}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{399} + \sqrt{400}}$$

Λύση

$$\alpha) \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}} = \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}} \cdot \frac{\sqrt{a+1}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+1}-\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a+1}-\sqrt{a}}{a+1-a} = \sqrt{a+1} - \sqrt{a}$$

β) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα στο (α) ερώτημα έχουμε:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3+\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{10}+\sqrt{11}} + \frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{12}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{399}+\sqrt{400}} \\ &= \sqrt{10} - \sqrt{9} + \sqrt{11} - \sqrt{10} + \sqrt{12} - \sqrt{11} + \dots + \sqrt{400} - \sqrt{399} \\ &= \sqrt{400} - \sqrt{9} = 20 - 3 = 17 \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

Έστω x και y θετικοί ακέραιοι αριθμοί τέτοιοι ώστε $x\sqrt{y} + y\sqrt{x} - \sqrt{5x} - \sqrt{5y} + \sqrt{5xy} = 5$. Να βρείτε την τιμή του $x + y$.

Λύση

$$\begin{aligned} & x\sqrt{y} + y\sqrt{x} - \sqrt{5x} - \sqrt{5y} + \sqrt{5xy} = 5. \\ \Rightarrow & x\sqrt{y} + y\sqrt{x} + \sqrt{5xy} = 5 + \sqrt{5x} + \sqrt{5y} \\ \Rightarrow & \sqrt{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{5}) = \sqrt{5}(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{5}) \\ \Rightarrow & \sqrt{xy} = \sqrt{5} \\ \Rightarrow & xy = 5 \end{aligned}$$

Αφού x και y θετικοί ακέραιοι αριθμοί τότε $(x, y) = (1, 5)$ ή $(x, y) = (5, 1)$.

Άρα $x + y = 6$.

Πρόβλημα 3

Δίνεται κύκλος με διάμετρο AB και εφαπτομένη Bx . Από ένα σημείο E του κύκλου φέρουμε τέμνουσα AE η οποία όταν προεκταθεί, τέμνει τη Bx στο σημείο Γ . Η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο E τέμνει τη Bx στο σημείο Δ . Να δείξετε ότι το τρίγωνο $\Gamma\Delta E$ είναι ισοσκελές.

Λύση

$\widehat{AEB} = 90^\circ$ (εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο)

Έστω $\widehat{EAB} = y$ και $\widehat{ABE} = x$

Τότε $x + y = 90^\circ$ (από ορθογώνιο τριγ. AEB) (1)

$\widehat{ZEA} = x$ (θεώρημα χορδής εφαπτομένης)

$\widehat{GED} = x$ (κατακορυφήν με $\widehat{ZEA}$)

$\widehat{DEB} = y$ (συμπληρωματική της $\widehat{GED}$)

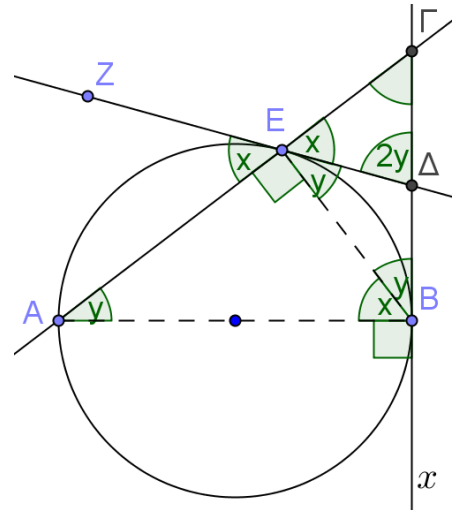
$\widehat{BDE} = y$ (συμπληρωματική της $\widehat{EBA}$)

$\widehat{GDE} = 2y$ (εξωτ. γωνία τριγ. EDB)

$x + 2y + \widehat{\Gamma} = 180^\circ$ (αθροισμα γων. τριγ. ΓED) (2)

Από (1) και (2) $\Rightarrow \widehat{\Gamma} = 90 - y \Rightarrow \widehat{\Gamma} = x \Rightarrow \widehat{\Gamma} = \widehat{E}$

Άρα το τρίγωνο $\Gamma\Delta E$ είναι ισοσκελές.



Πρόβλημα 4

Το $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο με πλευρά $AB = 4$ μονάδες. Ένας κύκλος περνά από τα σημεία A και B και εφάπτεται της πλευράς $\Gamma\Delta$. Να υπολογίσετε το μήκος της ακτίνας του.

Λύση:

Στο τρίγωνο BHZ

$HZ = 4 - R$, $HB = 2$, $BZ = R$.

Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα ισχύει:

$$R^2 = 4 + (4 - R)^2$$

$$\Rightarrow R^2 = 4 + 16 - 8R + R^2$$

$$\Rightarrow 8R = 20$$

$$\Rightarrow R = \frac{5}{2} \text{ μονάδες}$$

