



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 10/12/16

Ωρα εξέτασης: 09:30 -12:30

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

Προτεινόμενες Λύσεις

Πρόβλημα 1: α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in [-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, +\infty)$ ισχύει

$$\frac{4x^2}{(1 - \sqrt{1 + 2x})^2} = (1 + \sqrt{1 + 2x})^2.$$

β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$, για τις οποίες αληθεύει η ανίσωση

$$\frac{4x^2}{(1 - \sqrt{1 + 2x})^2} \leq 2x + 9$$

Λύση

α) $\forall x \in [-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, +\infty)$,

$$\frac{4x^2}{(1 - \sqrt{1 + 2x})^2} = \frac{4x^2}{(1 - \sqrt{1 + 2x})^2} \cdot \frac{(1 + \sqrt{1 + 2x})^2}{(1 + \sqrt{1 + 2x})^2} = \frac{4x^2(1 + \sqrt{1 + 2x})^2}{4x^2} = (1 + \sqrt{1 + 2x})^2$$

β) Έχουμε διαδοχικά, για $x \in [-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, +\infty)$:

$$\begin{aligned} \frac{4x^2}{(1 - \sqrt{1 + 2x})^2} &\leq 2x + 9 \\ &\quad \text{ή} \\ (1 + \sqrt{1 + 2x})^2 &\leq 2x + 9 \\ &\quad \text{ή} \\ 1 + 1 + 2x + 2\sqrt{1 + 2x} &\leq 2x + 9 \\ &\quad \text{ή} \\ 2\sqrt{1 + 2x} &\leq 7 \\ &\quad \text{ή} \\ 4(1 + 2x) &\leq 49 \end{aligned}$$

απ' όπου

$$x \leq \frac{45}{8}$$

Συνεπώς,

$$x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{45}{8}\right]$$

Πρόβλημα 2: Αν ο n είναι θετικός ακέραιος με $n > 2$, να αποδείξετε ότι το κλάσμα

$$\frac{n^5 - 5n^3 + 4n}{120}$$

είναι ακέραιος αριθμός.

Λύση

Παραγοντοποιούμε την παράσταση $n^5 - 5n^3 + 4n$.

$$\begin{aligned} n^5 - 5n^3 + 4n &= n(n^4 - 5n^2 + 4) = n(n^4 - 4n^2 - n^2 + 4) = n[n^2(n^2 - 4) - (n^2 - 4)] \\ &= n(n^2 - 4)(n^2 - 1) = n(n - 2)(n + 2)(n - 1)(n + 1). \end{aligned}$$

Άρα

$$\frac{n^5 - 5n^3 + 4n}{120} = \frac{n(n - 2)(n + 2)(n - 1)(n + 1)}{120}$$

Παρατηρούμε ότι η παράσταση $n^5 - 5n^3 + 4n$ είναι γινόμενο πέντε διαδοχικών φυσικών αριθμών.

Επομένως το $5 / n^5 - 5n^3 + 4n$ και επίσης το $3 / n^5 - 5n^3 + 4n$, αφού αν έχουμε πέντε διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς τουλάχιστον ένας διαιρείται με το 3 και με το 5.

Επίσης τουλάχιστον δύο από τους παράγοντες του γινομένου είναι άρτιοι και τουλάχιστον ένας διαιρείται με το 4 και επόμενως το γινόμενο διαιρείται και με το 8.

Επειδή οι αριθμοί 3, 5, 8 είναι πρώτοι μεταξύ τους, συμπεραίνουμε ότι το γινόμενο $n(n - 2)(n + 2)(n - 1)(n + 1)$ διαιρείται με το $3 \cdot 5 \cdot 8 = 120$. Άρα το κλάσμα

$$\frac{n^5 - 5n^3 + 4n}{120}$$

είναι ακέραιος αριθμός για $n > 2$.

Πρόβλημα 3: Αν $\varepsilon\varphi\chi\eta\varphi y = \frac{\beta}{\alpha}$, $\alpha, \beta \neq 0$, να αποδείξετε ότι η τιμή της παράστασης

$$K = \frac{\tau\varepsilon\mu^2x}{\alpha\varepsilon\varphi^2x + \beta} + \frac{\tau\varepsilon\mu^2y}{\alpha\varepsilon\varphi^2y + \beta}$$

είναι

$$K = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}$$

Λύση

Έχουμε,

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{\tau\epsilon\mu^2x}{a\epsilon\varphi^2x + \beta} + \frac{\tau\epsilon\mu^2y}{a\epsilon\varphi^2y + \beta} \\
 &= \frac{1 + \epsilon\varphi^2x}{\alpha\left(\epsilon\varphi^2x + \frac{\beta}{\alpha}\right)} + \frac{1 + \epsilon\varphi^2y}{\alpha\left(\epsilon\varphi^2y + \frac{\beta}{\alpha}\right)} \\
 &= \frac{1 + \epsilon\varphi^2x}{\alpha(\epsilon\varphi^2x + \epsilon\varphi x\epsilon\varphi y)} + \frac{1 + \epsilon\varphi^2y}{\alpha(\epsilon\varphi^2y + \epsilon\varphi x\epsilon\varphi y)} \\
 &= \frac{1 + \epsilon\varphi^2x}{a\epsilon\varphi x(\epsilon\varphi x + \epsilon\varphi y)} + \frac{1 + \epsilon\varphi^2y}{a\epsilon\varphi y(\epsilon\varphi y + \epsilon\varphi x)} \\
 &= \frac{(1 + \epsilon\varphi^2x)\epsilon\varphi y + (1 + \epsilon\varphi^2y)\epsilon\varphi x}{a\epsilon\varphi x\epsilon\varphi y(\epsilon\varphi x + \epsilon\varphi y)} \\
 &= \frac{\epsilon\varphi x + \epsilon\varphi y + \epsilon\varphi x\epsilon\varphi y(\epsilon\varphi x + \epsilon\varphi y)}{a\epsilon\varphi x\epsilon\varphi y(\epsilon\varphi x + \epsilon\varphi y)} \\
 &= \frac{(\epsilon\varphi x + \epsilon\varphi y)(1 + \epsilon\varphi x\epsilon\varphi y)}{a\epsilon\varphi x\epsilon\varphi y(\epsilon\varphi x + \epsilon\varphi y)} \\
 &= \frac{1 + \frac{\beta}{\alpha}}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}
 \end{aligned}$$

Πρόβλημα 4: Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$. Από τις κορυφές A, B, Γ φέρουμε κάθετες προς τις απέναντι πλευρές του τριγώνου και έστω Δ, E, Z τα ίχνη των καθέτων πάνω στις πλευρές $B\Gamma, A\Gamma, AB$ αντίστοιχα. Ονομάζουμε H το σημείο τομής των υψών $A\Delta, BE, \Gamma Z$ του τριγώνου.

- I. Αν Θ, K, Λ, I τα μέσα των ευθυγράμμων τμημάτων $AH, \Gamma H, B\Gamma, AB$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $\Theta K \Lambda I$ είναι ορθογώνιο.
- II. Φέρουμε την εφαπτομένη (ϵ) του κύκλου που διέρχεται από τις κορυφές του ορθογωνίου $\Theta K \Lambda I$ στο σημείο Θ . Να αποδείξετε ότι η (ϵ) είναι παράλληλη με την ευθεία ZE .

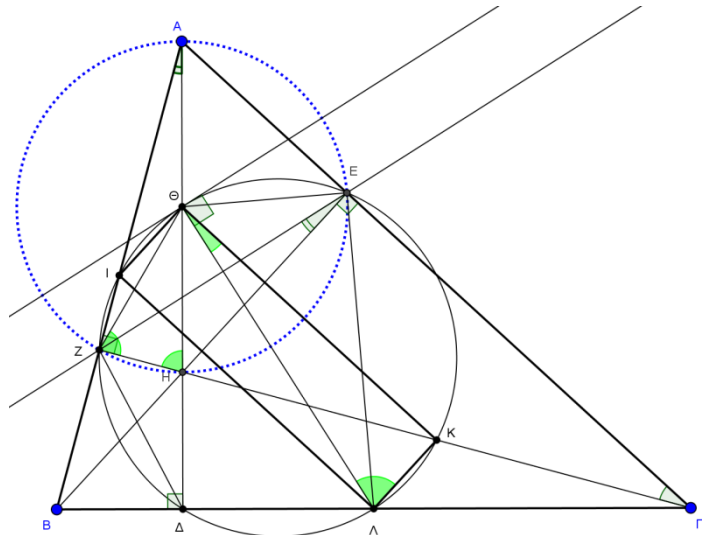
Λύση

- I. Επειδή το σημείο I είναι μέσον του AB και Λ μέσον του $B\Gamma$, θα έχουμε

$$I\Lambda = \parallel \frac{A\Gamma}{2}$$

Επίσης, το σημείο Θ είναι μέσον του AH και K μέσον του ΓH . Άρα έχουμε

$$\Theta K = \parallel \frac{A\Gamma}{2} \quad (1)$$



Άρα το τετράπλευρο $\theta K \Lambda I$ είναι παραλληλόγραμμο.

Όμως στο τρίγωνο ΔABH , το σημείο θ είναι μέσον του AH και I μέσον του AB .
Επομένως

$$\theta I = \parallel \frac{BH}{2} \Rightarrow \theta I \parallel B\Delta$$

Επειδή όμως $B\Delta \perp A\Gamma$, έπεται ότι και $\theta I \perp A\Gamma$ (2).

Από τις (1) και (2) παίρνουμε ότι $\theta I \perp \theta K$. Άρα το παραλληλόγραμμο $\theta K \Lambda I$ είναι ορθογώνιο.

II. Από το ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta \theta \Lambda K$ έχουμε, $\angle \Lambda \theta K = 90^\circ - \angle \theta \Lambda K$.

Όμως, $\angle \theta \Lambda K = \angle \theta ZK$, επειδή είναι εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο του κύκλου που περνά από τις κορυφές του ορθογωνίου $\theta K \Lambda I$. Επομένως,

$$\angle \Lambda \theta K = 90^\circ - \angle \theta ZK = 90^\circ - \angle \theta ZH.$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔAZH η $Z\theta$ είναι διάμεσος, άρα το τρίγωνο $\Delta \theta ZH$ είναι ισοσκελές. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $\angle \theta ZH = \angle ZH\theta$. Επομένως η προηγούμενη ισότητα γράφεται,

$$\angle \Lambda \theta K = 90^\circ - \angle \theta ZK \Rightarrow \angle \Lambda \theta K = 90^\circ - \angle ZH\theta = 90^\circ - \angle ZHA \Rightarrow$$

$$\angle \Lambda \theta K = \angle ZAH \quad (3).$$

Επειδή όμως τα τρίγωνα ΔAZH και ΔAHE είναι ορθογώνια και θ το μέσον της κοινής τους υποτείνουσας AH , θα έχουμε $\theta A = \theta Z = \theta H = \theta E$. Δηλαδή υπάρχει κύκλος που περνά από τα σημεία A, Z, H, E . Άρα

$$\angle ZAH = \angle ZEH \quad (4)$$

αφού είναι εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο ZH . Από τις (3) και (4) παίρνουμε

$$\angle \Lambda \theta K = \angle ZEH$$

Επειδή όμως οι δύο πλευρές αυτών των ίσων γωνιών είναι κάθετες $BH \perp \theta K$ και είναι και οι δύο οξείες θα έχουμε $ZE \perp \theta \Lambda$. Όμως από την υπόθεση

$$\theta \Lambda \perp (\varepsilon)$$

Άρα, $(\varepsilon) \parallel ZE$.