



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2016

Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 12/11/2016

Ώρα Εξέτασης: 10:00-12:00

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Πρόβλημα 1

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό $\alpha > 0$ ισχύει η ανισότητα

$$\sqrt{\alpha + 1} < \frac{2\alpha + 1}{2\sqrt{\alpha}}$$

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό n η προηγούμενη ανισότητα γίνεται

$$\sqrt{n + 1} - \sqrt{n} < \frac{\sqrt{n}}{2n}$$

γ) Να αποδείξετε ότι ισχύει

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6} + \dots + \frac{\sqrt{2016}}{4032} > \sqrt{2017}$$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ:

α) Επειδή $\alpha > 0$, η ανισότητα που θέλουμε να αποδείξουμε γράφεται ισοδύναμα:

$$\alpha + 1 < \frac{(2\alpha + 1)^2}{4\alpha}$$

ή

$$4\alpha(\alpha + 1) < (2\alpha + 1)^2$$

ή

$$4\alpha^2 + 4\alpha < 4\alpha^2 + 4\alpha + 1, \text{ που είναι αληθής}$$

β) Από το α) για κάθε θετικό ακέραιο n , έχουμε

$$\sqrt{n + 1} < \frac{2n + 1}{2\sqrt{n}}$$

ή

$$\sqrt{n + 1} - \sqrt{n} < \frac{2n + 1}{2\sqrt{n}} - \sqrt{n}$$

ή

$$\sqrt{n + 1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{2n}$$

γ) Από το β) έχουμε διαδοχικά για $n = 1, 2, 3, \dots, 2016$:

$$\begin{aligned}\sqrt{2} - 1 &< \frac{1}{2} \\ \sqrt{3} - \sqrt{2} &< \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \sqrt{4} - \sqrt{3} &< \frac{\sqrt{3}}{6} \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots\end{aligned}$$

$$\sqrt{2017} - \sqrt{2016} < \frac{\sqrt{2016}}{4032}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις 2016 πιο πάνω ανισότητες, έχουμε:

$$\sqrt{2017} - 1 < \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6} + \dots + \frac{\sqrt{2016}}{4032}$$

ή

$$\sqrt{2017} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6} + \dots + \frac{\sqrt{2016}}{4032}$$

Πρόβλημα 2

α) Να γράψετε την παράσταση $A = x^4 + 4$ ως γινόμενο δυο τριωνύμων της μορφής $x^2 + ax + b$.

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο $n > 1$, ο θετικός ακέραιος αριθμός $n^4 + 4$ δεν είναι ποτέ πρώτος.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ:

α) Η παράσταση $A = x^4 + 4$ γράφεται

$$A = x^4 + 4 = (x^2 + 2)^2 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$$

β) Επομένως από το (α) θα έχουμε

$$n^4 + 4 = (n^2 + 2n + 2)(n^2 - 2n + 2)$$

Και επειδή για $n > 1$ ισχύει

$$1 < n^2 - 2n + 2 < n^2 + 2n + 2$$

Ο αριθμός $n^4 + 4$ δεν είναι ποτέ πρώτος.

Πρόβλημα 3

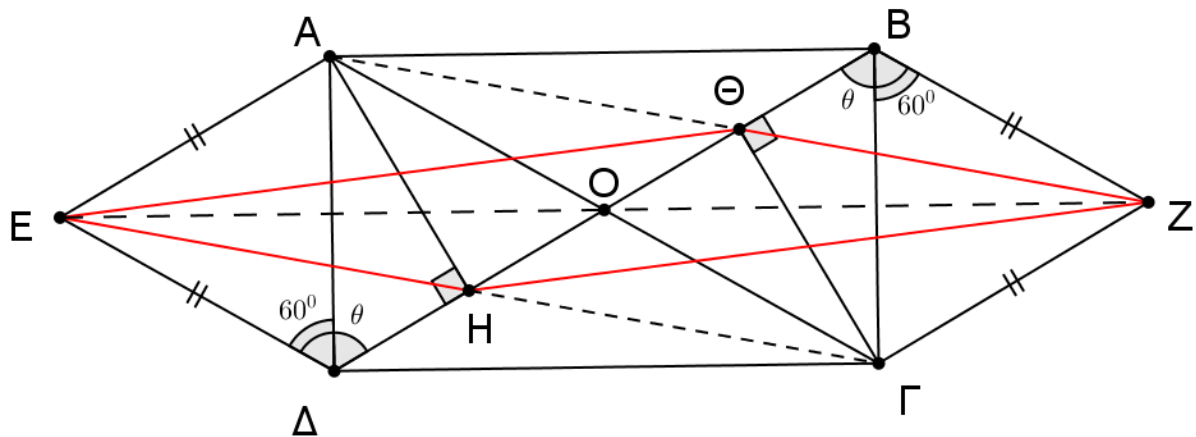
Από τις κορυφές A, Γ ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ με $AD < AB$ φέρουμε τις κάθετες $AH, \Gamma\Theta$ στη διαγώνιο $B\Delta$ (H, Θ σημεία της διαγωνίου $B\Delta$). Με πλευρές τις AD και $B\Gamma$ κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ADE και $B\Gamma Z$ που βρίσκονται εκτός του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$.

Να αποδείξετε ότι: α) Το $E\Theta ZH$ είναι παραλληλόγραμμο

β) Η EZ περνά από το κέντρο του $AB\Gamma\Delta$

γ) Η ευθεία EZ είναι παράλληλη προς τις $AB, \Delta\Gamma$.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ:



α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΔAH και $B\Gamma\Theta$ είναι ίσα, αφού έχουν $AD = B\Gamma$ και $\angle ADH = \angle \Gamma B\Theta = \theta$.

Άρα $\Delta H = B\Theta$ (1) και $AH = \Gamma\Theta$ (2).

Τα τρίγωνα $E\Delta H$ και $ZB\Theta$ είναι ίσα, αφού έχουν $E\Delta = ZB$, $\Delta H = B\Theta$ (λόγω (1)) και $\angle E\Delta H = \angle ZB\Theta = 60^\circ + \theta$. Άρα $E\mathbf{H} = Z\mathbf{\Theta}$ (3).

Τα τρίγωνα $E\Delta\Theta$ και $ZB\mathbf{H}$ είναι ίσα, αφού έχουν $E\Delta = ZB$,

$$\Delta\Theta = B\mathbf{H} \quad (\Delta\Theta = \Delta H + H\Theta = B\Theta + \Theta H = B\mathbf{H})$$

$$\text{και } \angle E\Delta\Theta = \angle ZB\mathbf{H} = 60^\circ + \theta.$$

Άρα $E\mathbf{\Theta} = Z\mathbf{H}$ (4). Από τις (3), (4) προκύπτει ότι το $E\Theta ZH$ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Επειδή $AH \parallel \Gamma\Theta$ (κάθετες στην ΔB) και λόγω της (2), το $AH\Gamma\Theta$ είναι παραλληλόγραμμο, αφού $AH \parallel \Gamma\Theta$. Άρα το σημείο τομής O των διαγωνίων του είναι το μέσον της διαγωνίου $H\Theta$, η οποία είναι επίσης διαγώνιος και του παραλληλογράμμου $E\Theta ZH$. Συνεπώς από το O περνά και η άλλη διαγώνιος του $E\Theta ZH$, δηλαδή η EZ . Όμως το O είναι το κέντρο του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$.

γ) Επειδή $EA = E\Delta$ και $OA = O\Delta$, η ευθεία EO είναι μεσοκάθετος του AD και άρα παράλληλος προς τις $AB, \Delta\Gamma$. Συνεπώς και λόγω του β), είναι $EZ \parallel AB \parallel \Delta\Gamma$.

Πρόβλημα 4

Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} x^2 - y\sqrt{xy} = 126 \\ y^2 - x\sqrt{xy} = -63 \end{cases}$, όπου x, y θετικοί πραγματικοί αριθμοί.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ:

Επειδή $x, y > 0$ το σύστημα γράφεται ισοδύναμα: $\begin{cases} \sqrt{x^4} - \sqrt{xy^3} = 126 \\ \sqrt{y^4} - \sqrt{x^3y} = -63 \end{cases}$ ή

$$\begin{cases} \sqrt{x}(\sqrt{x^3} - \sqrt{y^3}) = 126 \\ \sqrt{y}(\sqrt{x^3} - \sqrt{y^3}) = 63 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = 2 \\ \sqrt{y}(\sqrt{x^3} - \sqrt{y^3}) = 63 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} x = 4y \\ \sqrt{y}(\sqrt{x^3} - \sqrt{y^3}) = 63 \end{cases} \quad \text{ή}$$

$$\begin{cases} x = 4y \\ \sqrt{64y^4} - \sqrt{y^4} = 63 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} x = 4y \\ y^2 = 9 \end{cases}, \text{ απ' όπου τελικά παίρνουμε } \boxed{(x, y) = (12, 3)}.$$