



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 8/12/18

Ώρα εξέτασης: 09:30 -12:30

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

Προτεινόμενες Λύσεις

Πρόβλημα 1: (i) Αν $\alpha \geq 0$, να αποδείξετε ότι $9\alpha - 6\sqrt{\alpha} + 1 = 9\left(\sqrt{\alpha} - \frac{1}{3}\right)^2$.

(ii) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x, y, z, w που ικανοποιούν την εξίσωση

$$3(x + y + z + w) = 2(\sqrt{y} + \sqrt{z} + \sqrt{w}) + 6\sqrt{x-2} + 2$$

Λύση

$$(i) \quad 9\alpha - 6\sqrt{\alpha} + 1 = 9\left(\alpha - \frac{2}{3}\sqrt{\alpha} + \frac{1}{9}\right) = 9\left((\sqrt{\alpha})^2 - \frac{2}{3}\sqrt{\alpha} + \left(\frac{1}{3}\right)^2\right) = 9\left(\sqrt{\alpha} - \frac{1}{3}\right)^2$$

(ii) Αρχικά πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση επι 3 και έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} 9(x + y + z + w) &= 6(\sqrt{y} + \sqrt{z} + \sqrt{w}) + 18\sqrt{x-2} + 6 \\ (9y - 6\sqrt{y} + 1) + (9z - 6\sqrt{z} + 1) + (9w - 6\sqrt{w} + 1) + 9x - 18\sqrt{x-2} - 9 &= 0 \\ 9\left(\sqrt{y} - \frac{1}{3}\right)^2 + 9\left(\sqrt{z} - \frac{1}{3}\right)^2 + 9\left(\sqrt{w} - \frac{1}{3}\right)^2 + 9x - 18 - 18\sqrt{x-2} + 9 &= 0 \\ 9\left(\sqrt{y} - \frac{1}{3}\right)^2 + 9\left(\sqrt{z} - \frac{1}{3}\right)^2 + 9\left(\sqrt{w} - \frac{1}{3}\right)^2 + 9((x-2) - 2\sqrt{x-2} + 1) &= 0 \\ 9\left(\sqrt{y} - \frac{1}{3}\right)^2 + 9\left(\sqrt{z} - \frac{1}{3}\right)^2 + 9\left(\sqrt{w} - \frac{1}{3}\right)^2 + 9((\sqrt{x-2})^2 - 2\sqrt{x-2} + 1) &= 0 \\ 9\left(\sqrt{y} - \frac{1}{3}\right)^2 + 9\left(\sqrt{z} - \frac{1}{3}\right)^2 + 9\left(\sqrt{w} - \frac{1}{3}\right)^2 + 9(\sqrt{x-2} - 1)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Απ' όπου παίρνουμε

$$\begin{aligned} \sqrt{y} - \frac{1}{3} = 0 \text{ και } \sqrt{z} - \frac{1}{3} = 0 \text{ και } \sqrt{w} - \frac{1}{3} = 0 \text{ και } \sqrt{x-2} - 1 &= 0 \\ \text{ή} & \\ x = 3, y = z = w = \frac{1}{9} & \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2: Να βρείτε όλα τα ζεύγη (x, y) θετικών ακεραίων για τα οποία ισχύει

$$(x - 1)(21 - x) = y^2$$

Λύση

1^{ος} τρόπος

Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$\begin{aligned} 21x - x^2 - 21 + x &= y^2 \\ x^2 - 22x &= -21 - y^2 \\ x^2 - 22x + 121 &= 100 - y^2 \\ (x - 11)^2 &= 100 - y^2 : (1) \end{aligned}$$

Από την (1) προκύπτει ότι $100 - y^2 \geq 0 \Rightarrow 0 < y < 10$, απ' όπου $y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

Από την (1) προκύπτει και ότι το $100 - y^2$ είναι και τέλειο τετράγωνο και αυτό συμβαίνει για $y \in \{6, 8, 10\}$.

- Αν $y = 6$, από την (1) έχουμε: $(x - 11)^2 = 64 \Rightarrow x - 11 = \pm 8 \Rightarrow x = 19$ ή $x = 3$
- Αν $y = 8$, από την (1) έχουμε: $(x - 11)^2 = 36 \Rightarrow x - 11 = \pm 6 \Rightarrow x = 17$ ή $x = 5$
- Αν $y = 10$, από την (1) έχουμε: $(x - 11)^2 = 0 \Rightarrow x - 11 = 0 \Rightarrow x = 11$

Συνεπώς $(x, y) \in \{(19, 6), (3, 6), (17, 8), (5, 8), (11, 10)\}$

2^{ος} τρόπος

Προφανώς έχουμε $(x - 1)(21 - x) \geq 0$, απ' όπου $1 \leq x \leq 21$ και, αφού το x ακέραιος,

$$x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21\}$$

Όμως $(x - 1)(21 - x)$ τέλειο τετράγωνο θετικού ακεραίου, οπότε εύκολα καταλήγουμε ότι

$$x \in \{3, 5, 11, 17, 19\}$$

- Αν $x = 3$, έχουμε $36 = y^2 \Rightarrow y = 6$
- Αν $x = 5$, έχουμε $64 = y^2 \Rightarrow y = 8$
- Αν $x = 11$, έχουμε $100 = y^2 \Rightarrow y = 10$
- Αν $x = 17$, έχουμε $64 = y^2 \Rightarrow y = 8$
- Αν $x = 19$, έχουμε $36 = y^2 \Rightarrow y = 6$

Συνεπώς $(x, y) \in \{(3, 6), (5, 8), (11, 10), (17, 8), (19, 6)\}$

Πρόβλημα 3: Ένας γυμναστής γυμνάζει μια ομάδα ανδρών. Αν τοποθετήσει τους άνδρες σε σειρές ώστε να προκύπτει μια τετραγωνική διάταξη, χρησιμοποιώντας το μεγαλύτερο δυνατό αριθμό ανδρών της ομάδας, τότε του περισσεύουν κ άνδρες. Αν θέλει να αυξήσει κατά ένα τους άνδρες σε κάθε σειρά της πιο πάνω τετραγωνικής διάταξης, τότε του λείπουν λ άνδρες. Να βρείτε τον αριθμό των ανδρών της ομάδας που γυμνάζει ο γυμναστής συναρτήσει των κ και λ .

Λύση

Συμβολίζουμε x τον ζητούμενο αριθμό των ανδρών της ομάδας.

Έστω ότι η τετραγωνική διάταξη που χρησιμοποιεί το μεγαλύτερο δυνατό αριθμό ανδρών της ομάδας έχει ν σειρές και ν άνδρες σε κάθε σειρά. Τότε το πλήθος των ανδρών που χρησιμοποιούνται είναι ν^2 και, σύμφωνα με το πρόβλημα, $x = \nu^2 + \kappa : (1)$

Όταν αυξηθούν οι άνδρες κατά έναν σε κάθε σειρά, τότε οι σειρές παραμένουν ν και οι άνδρες σε κάθε σειρά γίνονται $\nu + 1$. Το πλήθος των ανδρών που χρησιμοποιούνται είναι $\nu(\nu + 1)$ και, σύμφωνα με το πρόβλημα, $x = \nu(\nu + 1) - \lambda : (2)$

Από τις (1) και (2) παίρνουμε $v(v+1) - \lambda = v^2 + \kappa \Rightarrow v = \kappa + \lambda$

Άρα $x = (\kappa + \lambda)^2 + \kappa$

Πρόβλημα 4: Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB > B\Gamma$. Γράφουμε τους κύκλους διαμέτρων AB και $\Gamma\Delta$. Ονομάζουμε Θ και H τα σημεία τομής των δυο κύκλων και M το μέσον του $B\Gamma$. Αν K και Λ είναι τα συμμετρικά του M ως προς Θ και H αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι τα σημεία K, A, Λ, Δ είναι κορυφές ρόμβου.

Λύση

Προφανώς

$$\angle A\Theta B = \angle \Delta\Theta \Gamma = 90^\circ$$

Έστω B', Γ' τα συμμετρικά των B, Γ ως προς το Θ . Τότε

$$K\Gamma'M\Gamma \# \Rightarrow K\Gamma' \parallel M\Gamma$$

$$KB'MB \# \Rightarrow KB' \parallel MB$$

Επομένως

$$K\Gamma' \parallel KB' \parallel B\Gamma$$

Άρα το σημείο $K \in B'\Gamma'$ και το K είναι το μέσον του $B'\Gamma'$,

δηλαδή, $KB' = K\Gamma'$. Επομένως

$$B'\Gamma' \parallel AD$$

Συνεπώς το τετράπλευρο $B'\Gamma'AD$ είναι παραλληλόγραμμο.

Όμως

Στο τρίγωνο $\Delta ABB'$ το $A\Theta$ είναι διάμεσος και ύψος $\Rightarrow AB' = AB$. Ομοίως

Στο τρίγωνο $\Delta \Gamma\Gamma'$ το $\Delta\Theta$ είναι διάμεσος και ύψος $\Rightarrow \Delta\Gamma' = \Delta\Gamma$

και αφού από το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ έχουμε $\Delta\Gamma = AB$, συμπεραίνουμε ότι $AB' = \Delta\Gamma'$.

Συνεπώς το τετράπλευρο $B'\Gamma'AD$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Άρα από την ισότητα των τριγώνων $\Delta KAG' = \Delta K\Delta B' \Rightarrow KA = K\Delta$.

Αν πάρουμε τα σημεία Γ'_1, B'_1 τα συμμετρικά των Γ, B ως προς το σημείο H αντίστοιχα, ομοίως αποδεικνύουμε ότι το τετράπλευρο $A\Gamma'_1 B'_1 \Delta$ είναι ορθογώνιο και επομένως $\Lambda A = \Lambda \Delta$.

Έστω T το μέσον του $A\Delta$. Τότε από το ισοσκελές τρίγωνο ΔKAD , έχουμε

$$KT \perp AD \Rightarrow KT \parallel B'\Delta \parallel \Gamma'A$$

Επίσης, από το ισοσκελές τρίγωνο $\Delta A\Lambda\Delta$, έχουμε

$$\Lambda T \perp AD \Rightarrow \Lambda T \parallel A\Gamma'_1 \parallel \Delta B'_1$$

Επομένως, αφού K, T, Λ συνευθειακά έπεται ότι Γ'_1, A, Γ' και B', Δ, B'_1 συνευθειακά. Άρα το τετράπλευρο $B'\Gamma'\Gamma'_1 B'_1$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Στο τρίγωνο $\Delta K\Lambda\Lambda$ το ΛT είναι διάμεσος και ύψος, άρα $AK = \Lambda\Lambda$.

Επομένως το τετράπλευρο $K\Lambda\Lambda\Delta$ έχει όλες τις πλευρές του ίσες και άρα είναι ρόμβος.

