



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2019

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 21/12/2019

Ώρα Εξέτασης: 09:30-12:30

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε όλους τους ακέραιους αριθμούς m , για τους οποίους το $4m^3 - 17m^2 - 7m + 70$ διαιρείται από το $4m + 3$.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ:

Αφού θέλουμε

$$\frac{4m^3 - 17m^2 - 7m + 70}{4m + 3} \in \mathbb{Z}$$

τότε

$$\frac{4(4m^3 - 17m^2 - 7m + 70)}{4m + 3} = \frac{16m^3 - 68m^2 - 28m + 280}{4m + 3} = 4m^2 - 20m + 8 + \frac{256}{4m + 3} \in \mathbb{Z}$$

Άρα

$$4m + 3 \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16, \pm 32, \pm 64, \pm 128, \pm 256\}$$

και, αφού $4m + 3$ περιττός, είναι $4m + 3 = \pm 1$. Επομένως,

- $4m + 3 = 1 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$
- $4m + 3 = -1 \Leftrightarrow m = -1 \in \mathbb{Z}$

Η μόνη λύση είναι $m = -1 \in \mathbb{Z}$.

Πρόβλημα 2

Να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$A = \frac{\sqrt{\sqrt{11}+3} + \sqrt{\sqrt{11}-3}}{\sqrt{\sqrt{11}+\sqrt{2}}} - \sqrt{11+6\sqrt{2}}$$

είναι ρητός.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ:

Έχουμε

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt{\sqrt{11}+3} + \sqrt{\sqrt{11}-3}}{\sqrt{\sqrt{11}+\sqrt{2}}} \right)^2 &= \frac{\sqrt{11}+3+2(\sqrt{\sqrt{11}+3})(\sqrt{\sqrt{11}-3})+\sqrt{11}-3}{\sqrt{11}+\sqrt{2}} \\ &= \frac{2\sqrt{11}+2\sqrt{2}}{\sqrt{11}+\sqrt{2}} = 2 \Rightarrow \boxed{\frac{\sqrt{\sqrt{11}+3} + \sqrt{\sqrt{11}-3}}{\sqrt{\sqrt{11}+\sqrt{2}}} = \sqrt{2}} \end{aligned} \quad (1)$$

Επίσης

$$\sqrt{11+6\sqrt{2}} = \sqrt{9+2+6\sqrt{2}} = \sqrt{3^2 + (\sqrt{2})^2 + 6\sqrt{2}} = \sqrt{(3+\sqrt{2})^2} = 3+\sqrt{2} \quad (2)$$

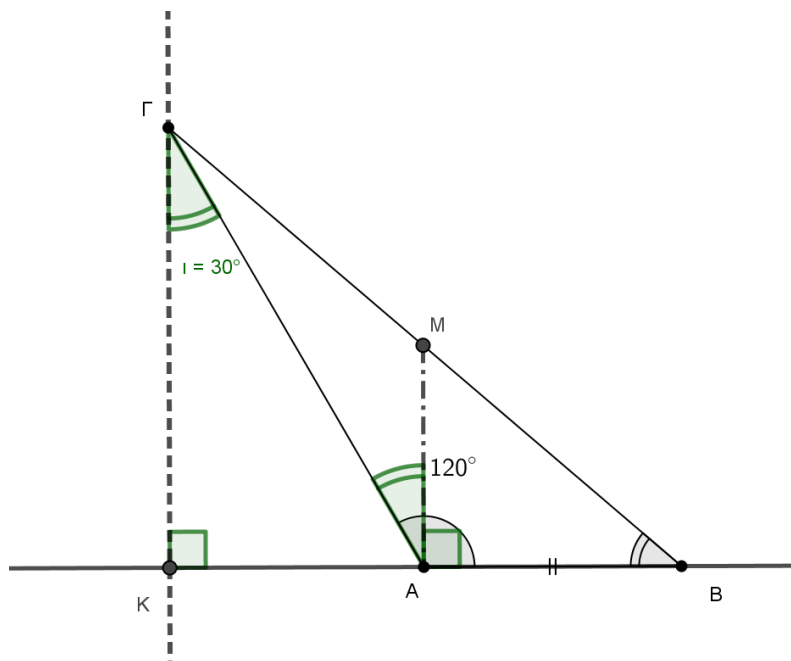
Από τις (1) και (2) θα πάρουμε

$$A = \sqrt{2} - 3 - \sqrt{2} = -3 \in \mathbb{Q}$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ με γωνία $\angle A = 120^\circ$. Αν $B\Gamma = \alpha$, $A\Gamma = \beta$ και $AB = \gamma$ οι πλευρές του τριγώνου, να αποδείξετε ότι

$$\varepsilon\varphi B = \frac{\beta\sqrt{3}}{\beta + 2\gamma}$$



ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ:

Φέρουμε $\Gamma K \perp AB$ και $AM \perp AB$.

Τότε από το ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle B\Gamma K$ έχουμε

$$\varepsilon\varphi B = \frac{\Gamma K}{\gamma + AK}$$

Επειδή $\angle K\Gamma A = 30^\circ$ έχουμε από το ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle K\Gamma A$ ότι

$$AK = \frac{\beta}{2} \text{ και } \sin 30^\circ = \frac{\Gamma K}{\beta} \Leftrightarrow \Gamma K = \frac{\beta\sqrt{3}}{2}$$

Άρα

$$\varepsilon\varphi B = \frac{\frac{\beta\sqrt{3}}{2}}{\gamma + \frac{\beta}{2}} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi B = \frac{\beta\sqrt{3}}{\beta + 2\gamma}$$

Πρόβλημα 4

Δίνεται ένα οξυγώνιο τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ με $\angle A = 60^\circ$ και $A\Gamma < AB$. Ονομάζουμε θ το μέσον του $B\Gamma$. Ο κύκλος (c_1) με κέντρο το θ και ακτίνα $\frac{B\Gamma}{2}$ τέμνει τις πλευρές AB και $A\Gamma$ στα σημεία E και Z αντίστοιχα. Έστω (c_2) ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $\triangle AEZ$. Από το μέσον M του τόξου ZAE φέρουμε την ευθεία MZ η οποία τέμνει ξανά τον κύκλο (c_1) στο σημείο K . Αν N, Ξ τα μέσα των τμημάτων $ME, \theta K$ αντίστοιχα να αποδείξετε ότι :

(α) $KE \perp ME$

(β) το τετράπλευρο $ME\theta K$ είναι ισοσκελές τραπέζιο

$$(\gamma) \frac{BE - \Gamma Z}{AB - A\Gamma} = \frac{N\Xi}{EZ}$$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ:

(α) Αφού από την υπόθεση το $B\Gamma$ είναι διάμετρος του κύκλου (c_1) θα έχουμε

$$\angle AZB = \angle A\Gamma E = 90^\circ$$

Επομένως επειδή

$\angle A = 60^\circ$ στο τρίγωνο $\triangle AZB$ έχουμε $\angle ABZ = 30^\circ$.

Όμως, $\angle ABZ = \angle EKZ$ γιατί είναι εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο EZ του κύκλου (c_1) . Άρα

$$\angle EKZ = 30^\circ.$$

Επίσης έχουμε

$$\angle ZAE = \angle ZME = 60^\circ$$

γιατί είναι εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο EZ του κύκλου (c_2) .

Επομένως από το τρίγωνο $\triangle MEK$ παίρνουμε ότι

$$\angle KEM = 90^\circ, \text{ δηλαδή}$$

$$KE \perp ME.$$

(β) Επειδή $\angle ZME = 60^\circ$ και

M είναι από την υπόθεση, μέσο του τόξου ZAE , θα έχουμε ότι το τρίγωνο $\triangle ZME$ είναι ισόπλευρο. Επομένως,

$$ME = EZ = ZM \quad (1)$$

Επίσης, από τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle \Gamma ZB, \triangle \Gamma EB$ με μέσο της υποτείνουσας το θ , θα πάρουμε

$$E\theta = Z\theta = \frac{B\Gamma}{2}$$

Άρα, το τρίγωνο $\triangle E\theta Z$ είναι ισοσκελές.

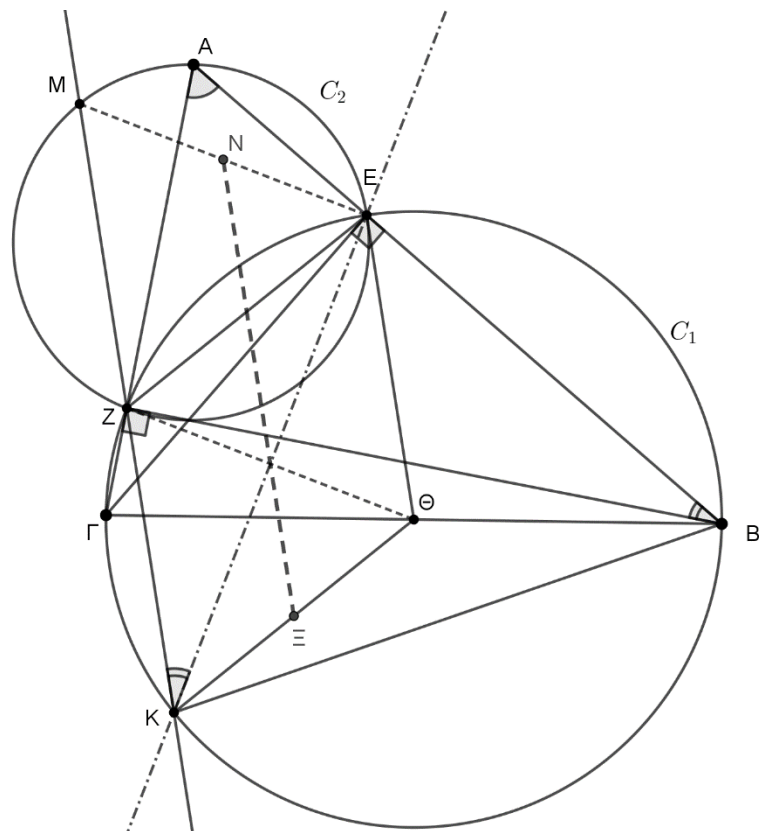
Από το ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle AZB$ με την μια γωνία του $\angle A = 60^\circ$ θα πάρουμε ότι $\angle ZBA = 30^\circ$.

Τότε θα έχουμε ότι

$$\angle Z\theta E = 60^\circ$$

(εγγεγραμμένη και επίκεντρη γωνία στο τόξο EZ του κύκλου (c_1)). Επομένως το τρίγωνο $\triangle E\theta Z$ είναι ισόπλευρο, με

$$E\theta = \theta Z = EZ \quad (2)$$



Από τις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι το τετράπλευρο $ME\theta Z$ είναι ρόμβος και άρα $E\theta \parallel MK$.

Δηλαδή το τετράπλευρο $ME\theta K$ είναι τραπέζιο. Επειδή όμως έχουμε $EM = E\theta = \theta K$ το τραπέζιο είναι και ισοσκελές.

(γ) Από τα προηγούμενα εύκολα προκύπτει ότι στο τραπέζιο $ME\theta K$ έχουμε ότι το Z είναι το μέσον της πλευράς του MK . Άρα

$$E\theta = MZ = ZK = EZ.$$

Αφού η $N\Xi$ είναι διάμεσος του τραπεζίου $ME\theta K$ θα πάρουμε

$$N\Xi = \frac{E\theta + MK}{2} = \frac{EZ + 2MZ}{2} = \frac{EZ + 2EZ}{2} = \frac{3EZ}{2} \Rightarrow \frac{N\Xi}{EZ} = \frac{3}{2} \quad (3)$$

Στα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle AGE$ και $\triangle AZB$ έχουμε αντίστοιχα ότι $\angle AGE = 30^\circ$ και $\angle ABZ = 30^\circ$.

Επομένως αντίστοιχα θα έχουμε

$$AE = \frac{AG}{2} \quad \text{και} \quad AZ = \frac{AB}{2}$$

Άρα, θα έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned} BE - \Gamma Z &= (AB - AE) - (AG - AZ) = AB - \frac{AG}{2} - AG + \frac{AB}{2} = \frac{3}{2}(AB - AG) \Rightarrow \\ \frac{BE - \Gamma Z}{AB - AG} &= \frac{3}{2} \quad (4) \end{aligned}$$

Από τις (3) και (4) έχουμε

$$\frac{BE - \Gamma Z}{AB - AG} = \frac{N\Xi}{EZ}.$$