



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2019

Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 02/11/2019

Ώρα Εξέτασης: 14:00-16:00

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Πρόβλημα 1

Αν x, y είναι πραγματικοί αριθμοί με $x, y > 0$ και $x \neq y$, να αποδείξετε ότι:

- i. $\frac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = x + y + \sqrt{xy}$
- ii. $\frac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} > 3\sqrt{xy}$

Λύση

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad \frac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} &= \frac{(x\sqrt{x}-y\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})} = \frac{x^2+x\sqrt{xy}-y\sqrt{xy}-y^2}{x-y} \\ &= \frac{(x-y)(x+y+\sqrt{xy})}{(x-y)} = x + y + \sqrt{xy} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad \frac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} &= x + y + \sqrt{xy} = x + y - 2\sqrt{xy} + 3\sqrt{xy} \\ &= (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 + 3\sqrt{xy} > 3\sqrt{xy}, \text{ αφού } x \neq y \end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

- i. Έστω πραγματικοί αριθμοί x, y . Να αποδείξετε ότι: $(x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 = (x^2 + y^2)^2$
ii. Να βρείτε δύο θετικούς ακέραιους αριθμούς m, n τέτοιους ώστε $m^2 + n^2 = 625^2$

Λύση

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad (x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 &= x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 4x^2y^2 \\ &= x^4 + 2x^2y^2 + y^4 \\ &= (x^2 + y^2)^2 \end{aligned}$$

- ii) Παρατηρούμε ότι μια λύση της $x^2 + y^2 = 625 = 25^2$ είναι $(x, y) = (20, 15)$, οπότε από την ταυτότητα του προηγούμενου ερωτήματος, έχουμε:
 $(20^2 - 15^2)^2 + (2 \cdot 20 \cdot 15)^2 = (625)^2$.

Έτσι, μια λύση της $m^2 + n^2 = 625^2$ είναι

$$m = 20^2 - 15^2 = 400 - 225 = 175, n = 2 \cdot 20 \cdot 15 = 600.$$

$$\text{Πράγματι, } 175^2 + 600^2 = 390625 = 625^2$$

ΑΛΛΗ ΛΥΣΗ: Επειδή οι αριθμοί 3,4,5 αποτελούν Πυθαγόρεια τριάδα και το 625^2 γράφεται

$$625^2 = (5 \cdot 125)^2$$

μια προφανής λύση είναι $m = 3 \cdot 125 = 375$ και $n = 4 \cdot 125 = 500$. Πράγματι

$$\begin{aligned} 3^2 + 4^2 = 5^2 &\Leftrightarrow 3^2 \cdot 125^2 + 4^2 \cdot 125^2 = 5^2 \cdot 125^2 \Leftrightarrow (3 \cdot 125)^2 + (4 \cdot 125)^2 = (5 \cdot 125)^2 \\ &\Leftrightarrow 375^2 + 500^2 = 625^2 \end{aligned}$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{101^3 + 102^3 + 103^3 + \dots + 200^3}{301 \cdot 503} = 50^2$$

Λύση

$$\text{Είναι, } 101^3 + 102^3 + 103^3 + \dots + 200^3 = (1^3 + 2^3 + \dots + 200^3) - (1^3 + 2^3 + \dots + 100^3)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{200^2 \cdot 201^2}{4} - \frac{100^2 \cdot 101^2}{4} \\ &= \frac{4 \cdot 100^2 \cdot 201^2 - 100^2 \cdot 101^2}{4} \\ &= \frac{100^2 \cdot (402^2 - 101^2)}{4} \\ &= \frac{100^2 \cdot (402 - 101) \cdot (402 + 101)}{4} \\ &= \frac{100^2 \cdot 301 \cdot 503}{2^2} \\ &= \left(\frac{100}{2}\right)^2 \cdot 301 \cdot 503 \end{aligned}$$

$$= 50^2 \cdot 301 \cdot 503$$

Συνεπώς

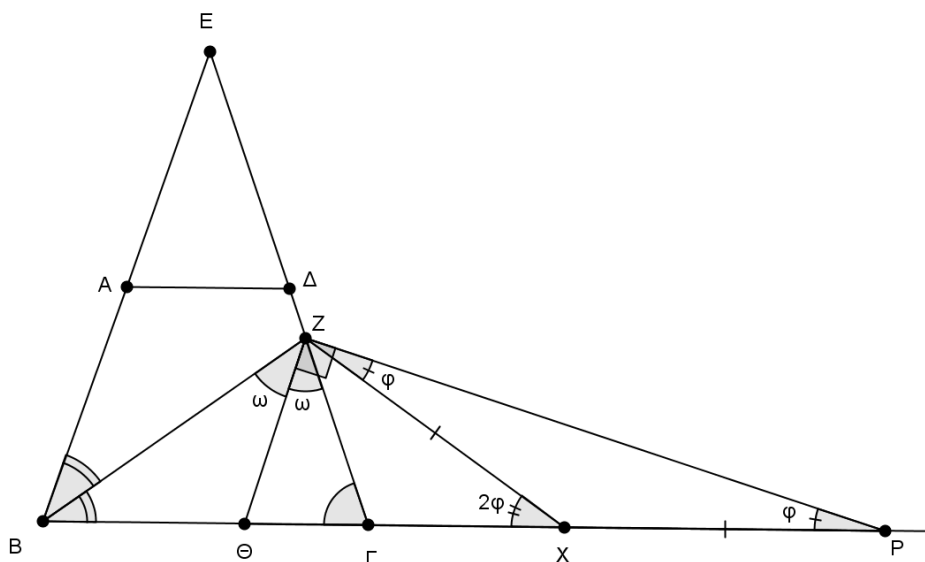
$$\frac{101^3 + 102^3 + 103^3 + \dots + 200^3}{301 \cdot 503} = 50^2$$

Πρόβλημα 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $\triangle EAD$ με $EA = ED$. Προεκτείνουμε τις πλευρές EA και ED προς τα A και D και πάνω στις προεκτάσεις παίρνουμε σημεία B και Γ αντίστοιχα έτσι ώστε $EA = AB$ και $ED = D\Gamma$. Η διχοτόμος της $\angle EBG$ τέμνει την ευθεία EG στο σημείο Z (διαφορετικό από το Δ) και η διχοτόμος της $\angle BZG$ τέμνει την ευθεία $B\Gamma$ στο σημείο Θ . Αν η κάθετη στο σημείο Z στην $Z\Theta$ τέμνει την ευθεία $B\Gamma$ στο σημείο P και X το μέσο του $P\Theta$ να αποδείξετε ότι:

- i. Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο
- ii. Το τρίγωνο $\triangle BZX$ είναι ισοσκελές.

Λύση



- i. Προφανές, αφού $AB = EA = ED = D\Gamma$
- ii. Αρχικά παρατηρούμε τα πιο κάτω:
 - Από το ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ είναι $\angle \Delta\Gamma B = \angle AB\Gamma = \angle B$
 - $\angle ABZ = \angle ZB\Gamma = \frac{\angle B}{2}$ (BZ διχοτόμος της γωνίας $\angle AB\Gamma = \angle B$)
 - $\angle BZ\Theta = \angle \Theta Z\Gamma = \omega$ ($Z\Theta$ διχοτόμος της γωνίας $\angle BZ\Gamma$)
 - Το $\triangle \Theta ZP$ είναι ορθογώνιο στο Z και ZX διάμεσος, άρα τα τρίγωνα $\triangle ZXP$ και $\triangle ZX\Theta$ είναι ισοσκελή.

1^{ος} τρόπος

Έστω $\angle PZX = \angle ZPX = \varphi$. Τότε $\angle ZXB = 2\varphi$.

$\angle Z\Theta B = \angle Z\Gamma\Theta + \angle \Theta Z\Gamma = \angle B + \omega$ ($\angle Z\Theta B$ εξωτερική στο τρίγωνο $\triangle Z\Theta\Gamma$) και

$\angle Z\Theta B = \angle \Theta ZP + \angle ZP\Theta = 90^\circ + \varphi$ ($\angle Z\Theta B$ εξωτερική στο ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle \Theta ZP$)

Άρα $\angle B + \omega = 90^\circ + \varphi \Rightarrow \angle B = 90^\circ + \varphi - \omega$: (1)

Εξ' άλλου, $\angle Z\Theta P = \frac{\angle B}{2} + \omega$ ($\angle Z\Theta P$ εξωτερική στο τρίγωνο $\triangle Z\Theta B$) και

$\angle Z\Theta P = 90^\circ - \varphi$ (Από το ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle PZ\Theta$)

$$\text{Άρα } \frac{\angle B}{2} + \omega = 90^0 - \varphi \Rightarrow \frac{\angle B}{2} = 90^0 - \varphi - \omega : (2).$$

Αφαιρούμε κατά μέλη τις (1) και (2):

$$\frac{\angle B}{2} = 2\varphi \Rightarrow \angle ZBX = \angle ZXB, \text{ που σημαίνει ότι το τρίγωνο } \triangle BZX \text{ είναι ισοσκελές.}$$

2^{ος} τρόπος

$$\text{Από το τρίγωνο } \triangle BZ\Gamma \text{ έχουμε } \frac{3B}{2} + 2\omega = 180 : (1)$$

$$\text{Από το τρίγωνο } \triangle Z\theta P \text{ έχουμε γωνία } \angle Z\theta P = 90 - \varphi.$$

Άρα από το τρίγωνο $\triangle Z\theta\Gamma$ έχουμε

$$90^0 - \varphi + \omega + B = 180^0 \Rightarrow B + \omega - \varphi = 90^0 : (2)$$

$$\text{Από τις (1) και (2) έχουμε } 180^0 - 2\omega = \frac{3B}{2} \text{ και } 180^0 - 2\omega = 2B - 2\varphi.$$

$$\text{Άρα } 2B - 2\varphi = \frac{3B}{2}, \text{ συνεπώς } \frac{\angle B}{2} = 2\varphi \Rightarrow \angle ZBX = \angle ZXB, \text{ που σημαίνει ότι το τρίγωνο } \triangle BZX \text{ είναι ισοσκελές.}$$