

ΒΑΣΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΣΤΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

A. Προσπαθείστε και απομνημονεύστε τον παρακάτω πίνακα βασικών ολοκληρωμάτων:

$$\begin{array}{lll} 1. \int c \, dx = cx + c_1 & 2. \int x^v \, dx = \frac{x^{v+1}}{v+1} + c & 3. \int \eta\mu x \, dx = -\sigma\nu x + c \\ 4. \int \sigma\nu x \, dx = \eta\mu x + c & 5. \int e^x \, dx = e^x + c & 6. \int \frac{1}{\sigma\nu^2 x} \, dx = \phi x + c \\ 7. \int \frac{1}{\eta\mu^2 x} \, dx = -\phi x + c & 8. \int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + c & 9. \int \frac{1}{2\sqrt{x}} \, dx = \sqrt{x} + c \\ 10. \int x^a \, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, \quad a \neq -1. \end{array}$$

B. Οι παρακάτω τύποι προκύπτουν άμεσα από τον ορισμό και πρέπει να έχετε ευχέρεια στην απευθείας χρήση τους:

$$\begin{array}{lll} 1. \int \eta\mu ax \, dx = -\frac{1}{a} \sigma\nu ax + c & 2. \int \sigma\nu ax \, dx = \frac{1}{a} \eta\mu ax + c & 3. \int e^{ax} \, dx = \frac{1}{a} e^{ax} + c \\ 4. \int \frac{1}{ax + \beta} \, dx = \frac{1}{a} \ln|ax + \beta| + c. \end{array}$$

Δείτε τα παρακάτω παραδείγματα:

$$\begin{array}{l} \int 5\sigma\nu 3x \, dx = \frac{5}{3} \eta\mu 3x + c, \quad \int e^{\frac{x}{4}} \, dx = 4e^{\frac{x}{4}} + c, \quad \int \frac{3}{4x+5} \, dx = \frac{4}{3} \ln|4x+5| + c. \\ \int \eta\mu(2x + \frac{\pi}{6}) \, dx = -\frac{1}{2} \sigma\nu(2x + \frac{\pi}{6}) + c, \quad \int e^{3x-5} \, dx = \frac{1}{3} e^{3x-5} + c. \end{array}$$

Γ. Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

Εδώ υπάρχει ένας απλός κανόνας. Ονομάζουμε u μια παράσταση που υπάρχει μέσα στο ολοκλήρωμα και παραγωγίζοντας η παράσταση αυτή επανεμφανίζεται μέσα στο ολοκλήρωμα ή με κατάλληλες αντικαταστάσεις φροντίζουμε να φύγει μέσα από το ολοκλήρωμα ό,τι υπήρχε με την προηγούμενη μεταβλητή. Εννοείται, ότι η νέα παράσταση θέλουμε να είναι απλούστερη της αρχικής και άμεσα υπολογιστέα – αν είναι δυνατόν. Δείτε τα παρακάτω παραδείγματα:

$$1. \int (2x-1)(x^2-x+5)^4 \, dx. \quad \text{Αν } u = x^2 - x + 5, \, du = (2x-1)dx, \text{ άρα:}$$

$$\int (2x-1)(x^2-x+5)^4 \, dx = \int u^4 \, du = \frac{u^5}{5} + c.$$

2.

$$\int (x-2)(x^2-4x+1)^5 \, dx. \quad \text{Αν } u = x^2 - 4x + 1, \, du = (2x-4)dx, \frac{1}{2} du = (x-2)dx, \text{ άρα:}$$

$$\int (x-2)(x^2-4x+1)^5 \, dx = \int \frac{1}{2} u^5 \, du = \frac{u^6}{12} + c.$$

$$3. \int \sqrt{3x-2} \, dx. \quad \text{Αν } u = 3x-2, \, du = 3dx, \frac{1}{3} du = dx, \text{ άρα:}$$

$$\int \frac{1}{3} \sqrt{u} du = \frac{1}{3} \cdot \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2u\sqrt{u}}{9} + c.$$

Παρατηρήστε ότι όταν έχουμε ρίζα, συνήθως ονομάζουμε u την υπόρριζη ποσότητα. Σε πολλές περιπτώσεις όμως, μπορούμε ή είναι βολικότερο να ονομάσουμε u όλη τη ρίζα και κατόπιν να πάμε σε αντικατάσταση. Δείτε αυτό:

$$\int \frac{\sqrt{2+3\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx. \text{ Θέτω } u = \sqrt{2+3\sqrt{x}}, du = \frac{1}{2u} \cdot \frac{3}{2\sqrt{x}} dx, \text{ άρα } \frac{4}{3} u du = \frac{1}{\sqrt{x}} dx. \text{ Συνεπώς}$$

$$\text{το αρχικό ολοκλήρωμα γράφεται: } \int \frac{4}{3} u^2 du = \frac{4}{9} u^3 + c.$$

Σε όλα τα παραπάνω ολοκληρώματα, υποτίθεται ότι φθάνοντας σε αποτέλεσμα, ξανακάνετε αντικατάσταση του u με την ποσότητα που είχατε ονομάσει. A2,A3,B1,B2/316,317.

Δ.Παραγοντική ολοκλήρωση

Αυτή η μέθοδος, στηρίζεται στη σχέση: $\int f'(x) \cdot g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx.$

Συγκεκριμένα, εφαρμόζουμε παραγοντική ολοκλήρωση στις παρακάτω γενικές περιπτώσεις:

- $\int P(x)\eta\mu ax dx, \int P(x)\sigma\nu ax dx, \int P(x)e^{ax} dx, \text{ όπου } P(x) \text{ πολυώνυμο.}$

Ξεκινάμε, θέτοντας στη θέση των ημαχ, συναχ, e^{ax} τα

$$\left(-\frac{1}{a}\sigma\nu ax\right)', \left(\frac{1}{a}\eta\mu ax\right)', \left(\frac{1}{a}e^{ax}\right)' \text{ αντίστοιχα και κάνουμε παραγοντική μέχρι ο}$$

βαθμός του πολυωνύμου με τις απανωτές παραγωγίσεις να μηδενιστεί. A1i-v/316.

- $\int e^{ax}\eta\mu ax dx, \int e^{ax}\sigma\nu ax dx.$

Ονομάζουμε I το ολοκλήρωμα που θέλουμε να υπολογίσουμε, κάνουμε δύο ακριβώς φορές παραγοντική ολοκλήρωση στηριγμένοι στην αντικατάσταση του e^{ax} με την ποσότητα $\left(\frac{1}{a}e^{ax}\right)'$ κατά προτίμηση και μας προκύπτει στο 2^ο μέλος πάλι το I.

Λύνουμε την εξίσωση που έχει δημιουργηθεί ως προς I και δεν ξεχνάμε τον κεσέ.(+c). A1viii,ix/316.

- $\int \frac{\eta\mu^2 ax}{\sigma\nu^4 ax} dx, \int \frac{\sigma\nu^2 ax}{\eta\mu^4 ax} dx$

Κάνουμε ότι και στην προηγούμενη περίπτωση, αλλά το ξεκίνημα στηρίζεται στην αντικατάσταση των ποσοτήτων $\frac{1}{\sigma\nu^2 x}, \frac{1}{\eta\mu^2 x}, \text{ με } (\phi x)', (-\phi x)' \text{ αντίστοιχα.}$

- $\int P(x)\ln ax dx.$

Ξεκινάμε την παραγοντική ολοκλήρωση θέτοντας στη θέση του P(x) την παράγωγο μιας αρχικής της π.χ. αν $P(x)=2x+1$ θέτουμε στη θέση της την ποσότητα $(x^2+x)'$. A1vi,vii/316 και B3i,ii/317.

*** Κολπέτο: Αφορά την πρώτη και την τρίτη «βούλα»:

$$\int (x^2 - 3x) \sin ax \, dx = (x^2 - 3x) \cdot \frac{\eta\mu ax}{a} + (2x - 3) \cdot \frac{\sigma\nu ax}{a^2} - 2 \cdot \frac{\eta\mu ax}{a^3} + c$$

$x^2 - 3x$	$\sin ax$
$2x - 3$	$\frac{\eta\mu ax}{a}$
2	$-\frac{\sigma\nu ax}{a^2}$
0	$-\frac{\eta\mu ax}{a^3}$

Ε.Πως αντιμετωπίζουμε ολοκληρώματα της μορφής:

$$\int \eta\mu^\nu x \, dx, \quad \int \sigma\nu^\nu x \, dx$$

Αν το ν είναι άρτιος, τότε χρησιμοποιούμε τους τύπους αποτετραγωνισμού:

$$2\sigma\nu^2\alpha = 1 + \sigma\nu 2\alpha, \quad 2\eta\mu^2\alpha = 1 - \sigma\nu 2\alpha.$$

Αν το ν είναι περιττός, τότε θέτουμε $u = \sigma\nu x$ ή $u = \eta\mu x$ αντίστοιχα, σπάζοντας συγχρόνως σε γινόμενο: $\eta\mu^\nu x = \eta\mu^{\nu-1} x \eta\mu x$ ή $\sigma\nu^\nu x = \sigma\nu^{\nu-1} x \sigma\nu x$.

Παραδείγματα: .

1. $\int \sigma\nu^\nu x \, dx$. Θέτω $u = \eta\mu x$, $du = \sigma\nu x \, dx$, $\sigma\nu^2 x = 1 - \eta\mu^2 x = 1 - u^2$. Άρα:

$$\int \sigma\nu^3 x \, dx = \int (1 - u^2) du = u - \frac{u^3}{3} + c.$$

$$2. \int \eta\mu^2 3x \, dx = \int \frac{1 - \sigma\nu 6x}{2} \, dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{12} \eta\mu 6x + c.$$

Άσκηση B4iii, B5/317.

ΣΤ.Πως αντιμετωπίζουμε ολοκληρώματα της μορφής :

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} \, dx, P, Q \text{ πολυώνυμα.}$$

- Αν ο αριθμητής είναι παράγωγος του παρονομαστή, τότε το αποτέλεσμα είναι άμεσο και ισούται με $\ln|Q(x)| + c$.
- Αν ο βαθμός του αριθμητή είναι μεγαλύτερος ή ίσος με το βαθμό του παρονομαστή, διαιρούμε το P(x) με το Q(x) και γράφουμε το P(x) στη μορφή $P(x) = Q(x)f(x) + t(x)$. Σπάμε το ολοκλήρωμα σε άθροισμα δύο ολοκληρωμάτων και απομένει ο υπολογισμός του ολοκληρώματος $\int \frac{t(x)}{Q(x)} \, dx$. Για τον υπολογισμό αυτού, κοιτάζετε την επόμενη «βούλα».
- Αν ο βαθμός του αριθμητή είναι μικρότερος από το βαθμό του παρονομαστή, τότε κάνουμε διάσπαση σε απλά κλάσματα, αφού πρώτα μετατρέψουμε τον παρονομαστή σε γινόμενο παραγόντων.

Άσκηση B7/317 και Γ3/352.

Ζ. Προσοχή στην περίπτωση: $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln |f(x)| + c.$

Η.Πως αντιμετωπίζουμε ολοκληρώματα της μορφής :

$$\int \eta\mu^\kappa x \cdot \sigma\nu^\lambda x \, dx, \kappa, \lambda \geq 2.$$

- Αν κ, λ άρτιοι, κάνουμε αποτετραγωνισμό και στα δύο.

- Αν κ άρτιος, λ περιττός, θέτουμε $u = \eta\mu\chi$.
- Αν κ περιττός, λ άρτιος, θέτουμε $u = \sigma\upsilon\nu\chi$.
- Αν κ,λ περιττοί, ονομάζουμε u το $\eta\mu\chi$.

Αν $\kappa=\lambda=1$, για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος χρησιμοποιούμε τους τύπους της σελίδας 317, άσκηση B6, οι οποίοι και θα δίνονται.

Θ. Για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων της μορφής:

$$\int \frac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu^k\chi} dx, \quad \int \frac{\sigma\upsilon\nu\chi}{\eta\mu^k\chi} dx.$$

Θέτουμε $u = \sigma\upsilon\nu\chi$ ή $u = \eta\mu\chi$ αντίστοιχα και η λύση είναι προφανής. B4ii/317.

ΙΑ. Κάποια «παράξενα» ολοκληρώματα

$$a. \int \frac{1}{1+e^x} dx = \int \frac{e^x + 1 - e^x}{1+e^x} dx = \int \left(1 - \frac{e^x}{1+e^x}\right) dx = x - \ln(1+e^x) + c$$

$$b. \int \frac{1}{\eta\mu\chi} dx = \int \frac{\eta\mu\chi}{\eta\mu^2\chi} dx = \int \frac{\eta\mu\chi}{1-\sigma\upsilon\nu^2\chi} dx = \int \frac{1}{u^2-1} du = \dots(A, B)$$

$$c. \int \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}} dx = \int x' \cdot e^{\frac{1}{x}} dx + \int \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} dx = x e^{\frac{1}{x}} - \int \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} dx + \int \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} dx = x \cdot e^{\frac{1}{x}} + c$$

$$d. \int \sqrt[v]{ax+b} dx = \int (ax+b)^{\frac{1}{v}} dx = \frac{(ax+b)^{\frac{1}{v}+1}}{\frac{1}{v}+1} \cdot \frac{1}{a} + c$$

ΙΑ. Πώς λύνουμε προβλήματα με ολοκλήρωση;

Όλες οι ασκήσεις-προβλήματα που αναφέρονται στις σελίδες 308,309, λύνονται αν συνειδητοποιήσετε ότι σε κάθε περίπτωση, σε ό,τι κι αν αναφέρεται το πρόβλημα, σας δίνει την παράγωγο μιας συνάρτησης (ή θα μπορούσε να δίνει και την δεύτερη παράγωγο) και σας ζητά να προσδιορίσετε την συνάρτηση. Ολοκληρώστε λοιπόν και τα δύο μέλη της σχέσης που σας προσφέρθηκε και στη συνέχεια προσδιορίστε με την αρχική συνθήκη τη σταθερά c ή απαλείψτε την αν το ζητούμενο είναι η διαφορά τιμών για τη συνάρτηση.

ΙΒ. Ας τα «μαζέψουμε»:

Ας πούμε ότι έχετε να υπολογίσετε ένα ολοκλήρωμα. Τι θα κοιτάξετε για να το βρείτε;

- Μήπως είναι άμεσα υπολογιστέο. Αυτό σημαίνει ή ότι είναι κάποια από τις στοιχειώδεις μορφές, ή ότι η προς ολοκλήρωση συνάρτηση προσέξατε ότι είναι η παράγωγος μιας γνωστής σας συνάρτησης.
- Μήπως αν το σπάσουμε σε άθροισμα ή διαφορά άλλων είναι ευχερέστερος ο υπολογισμός του, δηλαδή μήπως εμφανίζονται στοιχειώδη ολοκληρώματα.
- Μήπως ο αριθμητής είναι παράγωγος του παρονομαστή; Περίπτωση Z.
- Μήπως είναι ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης;
- Μήπως περιέχει μόνο τριγωνομετρικές συναρτήσεις, οπότε θέλει τον «τρόπο» του. Περίπτώσεις E, H, Θ.

- Μήπως εντάσσεται σε κάποια από τις περιπτώσεις παραγοντικής ολοκλήρωσης;
- Μήπως πρέπει να προσθαφαιρέσετε στο αριθμητή κάποια ποσότητα ώστε να εμφανισθεί σε αυτόν ο παρονομαστής ή/και η παράγωγος του παρονομαστή;
- Μήπως είναι κάποια «παραξενιά» (περίπτωση Ι)
- Αν η απάντηση σε όλα τα παραπάνω είναι «όχι», τότε κάντε αλλαγή μεταβλητής.
- Αν ούτε και η αλλαγή μεταβλητής πιάσει, ξαναδείτε τα όλα από την αρχή και παρηγορηθείτε: Κανένας δεν τα βλέπει όλα με την πρώτη ματιά !

$$\text{Συνάρτηση ορισμένη με ολοκλήρωμα} \quad F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Εφόσον η συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο Δ και το a είναι σημείο του Δ , η F είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει ότι: $F'(x) = f(x)$.

Προσοχή στις παρακάτω παρατηρήσεις:

1. Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένωση ξένων διαστημάτων, τα a και χ πρέπει να ανήκουν στο ίδιο διάστημα. Συνεπώς, αν μας ζητηθεί το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης $F(x) = \int_a^{h(x)} f(t)dt$, βρίσκουμε το σύνολο στο οποίο η $f(t)$ είναι συνεχής και απαιτούμε η παράσταση $h(x)$ να ανήκει σε αυτό. Αν η $f(t)$ ορίζεται σε ένωση διαστημάτων, απαιτούμε η $h(x)$ να ανήκει στο ίδιο διάστημα με αυτό στο οποίο ανήκει το a .
2. Αν στη θέση του χ , υπάρχει άλλη συνάρτηση, τότε η παραγωγή γίνεται ως εξής: $F(x) = \int_a^{g(x)} f(t)dt$, $F'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$, όπου $g(x)$ συνάρτηση παραγωγίσιμη. Αν η συνάρτηση $g(x)$ είναι κάτω άκρο του ολοκληρώματος, πριν παραγωγίσουμε τη φέρνουμε στο άνω άκρο αλλάζοντας το πρόσημό του ολοκληρώματος.
3. Αν η συνάρτηση $F(x)$ ορίζεται σαν: $F(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt$, τότε η παράγωγός της υπολογίζεται αφού σπάσουμε το ολοκλήρωμα σε άθροισμα δύο άλλων με κοινό άκρο οποιοδήποτε αριθμό a που να ανήκει στο διάστημα στο οποίο η f είναι συνεχής, δηλαδή: $F(x) = \int_{h(x)}^a f(t)dt + \int_a^{g(x)} f(t)dt$, δηλαδή ισχύει ότι: $F'(x) = -f(h(x)) \cdot h'(x) + f(g(x)) \cdot g'(x)$.
4. Αν η συνάρτηση $F(x)$ ορίζεται με τη βοήθεια διπλού ολοκληρώματος, τότε αυτό μπορεί να εξαλειφθεί με δύο διαδοχικές παραγωγίσεις: $F(x) = \int_a^x \left(\int_\beta^t f(u)du \right) dt$, άρα $F'(x) = \int_\beta^x f(u)du$ και $F''(x) = f(x)$.
5. Ισχύει γενικά ότι: $\int_a^\beta f(x)dx = \int_a^\beta f(t)dt = \int_a^\beta f(u)du = \dots$ κ.λ.π..
6. Αν $F(x) = \int_a^x g(x) \cdot f(t)dt$, τότε $F(x) = g(x) \cdot \int_a^x f(t)dt$ και ισχύει ότι: $F'(x) = g'(x) \cdot \int_a^x f(t)dt + g(x) \cdot f(x)$.
7. Αν $F(x) = \int_a^x f(\text{κάτι})dt$, και αυτό το «κάτι» περιέχει μέσα και χ , πριν παραγωγίσουμε, θέτουμε $u = \text{κάτι}$ και κάνουμε αλλαγή μεταβλητής.

A5,B1-και B6/339,Γ5,Γ6,Γ7/352,353.

Υπολογισμός ορισμένου ολοκληρώματος απλής μορφής

Θυμίζω κατ' αρχήν ότι το ορισμένο ολοκλήρωμα με άκρα πραγματικούς αριθμούς είναι ένας αριθμός. Ο υπολογισμός του αριθμού αυτού στηρίζεται στον υπολογισμό του αντίστοιχου αόριστου ολοκληρώματος, με τις ήδη γνωστές σας μεθόδους. Αν λοιπόν ονομάσουμε $F(x)$ μια αρχική συνάρτηση της συνεχούς $f(x)$, τότε ισχύει ότι:

$$\int_a^{\beta} f(x) dx = [F(x)]_a^{\beta} = F(\beta) - F(a).$$

Στην παραγοντική ολοκλήρωση, για παράδειγμα, γίνεται ως εξής:

$$\int_0^{\pi} x \eta \mu x dx = \int_0^{\pi} x(-\sigma \nu x)' dx = [-x \sigma \nu x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-\sigma \nu x) dx = -\pi \sigma \nu \pi + 0 + [\eta \mu x]_0^{\pi} = \pi.$$

Στην αλλαγή μεταβλητής, φροντίζουμε να αλλάζουμε και τις τιμές των άκρων του ολοκληρώματος: Ας πούμε ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το $\int_1^2 (x^2 - x)^5 (2x - 1) dx$.

Θέτουμε $u = x^2 - x$, άρα $du = (2x - 1) dx$ και για $x = 1$ είναι $u = 0$ ενώ για $x = 2$ είναι $u = 2$.

Συνεπώς, το αρχικό ολοκλήρωμα γίνεται: $\int_0^2 u^5 du = \left[\frac{u^6}{6}\right]_0^2 = \frac{64}{6} - 0 = \frac{32}{3}$.

Τέλος, αν πρέπει να υπολογίσετε ορισμένο ολοκλήρωμα συνάρτησης που βρίσκεται μέσα σε απόλυτη τιμή, τότε βρίσκεται το πρόσημο της παράστασης μέσα στο απόλυτο και «σπάτε» κατάλληλα το ολοκλήρωμα- είναι σαν να είχατε τη συνάρτηση ορισμένη σε κλάδους. Δείτε το παρακάτω παράδειγμα:

$$\int_{-2}^3 |x^2 - 3x + 2| dx = \int_{-2}^1 (x^2 - 3x + 2) dx + \int_1^2 (-x^2 + 3x - 2) dx + \int_2^3 (x^2 - 3x + 2) dx = \dots$$

αφού $x^2 - 3x + 2 > 0$ για $x < 1$ ή $x > 2$ και $x^2 - 3x + 2 < 0$ όταν $1 < x < 2$.

A1-A4/338, B7-B10/339, 340.

Πώς μετασχηματίζουμε ορισμένα ολοκληρώματα σε άλλα ορισμένα ολοκληρώματα

Υπάρχει μια γενική μέθοδος που λέει ότι αν θέλουμε να δείξουμε ότι το ολοκλήρωμα της f του «κάτι», ισούται με ένα άλλο ολοκλήρωμα της $f(x)$, τότε θέτουμε το «κάτι» ίσο με u και μετασχηματίζουμε κατάλληλα το αρχικό ολοκλήρωμα. Δείτε μερικά παραδείγματα:

1. Δείξτε ότι: $\int_0^a f(a - x) dx = \int_0^a f(x) dx$. Στο αρχικό ολοκλήρωμα, θέτω $u = a - x$, άρα $du = -dx$ και τα νέα άκρα είναι $u = a$ και $u = 0$ αντίστοιχα. Άρα έχουμε:

$$\int_0^a f(a - x) dx = -\int_a^0 f(u) du = \int_0^a f(u) du = \int_0^a f(x) dx.$$

2. Δείξτε ότι: $\int_0^1 f(x)(1 - x)^y dx = \int_0^1 f(1 - x)x^y dx$. Στο δεύτερο μέλος της σχέσης, θέτω $u = 1 - x$, $du = -dx$ και τα νέα άκρα είναι τα 1 και 0 αντίστοιχα. Άρα:

$$\int_0^1 f(1 - x)x^y dx = -\int_1^0 f(u)(1 - u)^y du = \int_0^1 f(u)(1 - u)^y du = \int_0^1 f(x)(1 - x)^y dx.$$

3. Αν η συνάρτηση f είναι άρτια, να δείξετε ότι: $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.

Παίρνουμε το πρώτο μέλος της σχέσης και αφού $f(x) = f(-x)$, έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a f(x) dx &= \int_{-a}^0 f(-x) dx + \int_0^a f(x) dx = \left(\text{Για } u = -x \text{ στο } 1^o \text{ ολοκλήρωμα} \right) = \\ &= \int_0^a f(u) du + \int_0^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx. \end{aligned}$$

Γ1/352.

Υπολογισμός εμβαδών επίπεδων χωρίων

1. Αν ζητείται το εμβαδόν που περικλείεται από την Cf, τον $\chi\chi'$ και τις ευθείες $\chi=\alpha$ και $\chi=\beta$, πρέπει να υπολογίσουμε το : $\int_a^\beta |f(x)| dx$. Ο υπολογισμός αυτός γίνεται όπως έχει περιγραφεί σε προηγούμενο λήμμα, αφού πρώτα βρούμε το πρόσημο της $f(x)$ στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και χωρίς φυσικά να απαιτείται η κατασκευή γραφικής παράστασης. A1, A2/349.
2. Αν ζητείται το εμβαδό που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της Cf και τον $\chi\chi'$, λύνουμε την εξίσωση $f(x)=0$ για να βρούμε τα σημεία τομής με τον $\chi\chi'$. Αν α, β είναι δύο τέτοια σημεία, υπολογίζουμε πάλι το $\int_a^\beta |f(x)| dx$. Αν υπάρχουν πάνω από δύο σημεία τομής, κάνουμε το ίδιο για κάθε διάστημα που δημιουργείται από διαδοχικά τέτοια σημεία. Γενικά, αν είναι n το πλήθος των σημείων τομής, τότε $(n-1)$ είναι το πλήθος των δημιουργούμενων χωρίων, άρα και το πλήθος των ολοκληρωμάτων που πρέπει να υπολογίσουμε. Δεν απαιτείται γραφική παράσταση. A3, B3/350.
3. Αν ζητείται ο υπολογισμός του εμβαδού που περικλείεται από τις Cf, Cg τότε λύνουμε την εξίσωση $f(x)=g(x)$ και αν α, β είναι οι λύσεις μιας τέτοιας εξίσωσης, υπολογίζουμε το $\int_a^\beta |f(x) - g(x)| dx$. Αν υπάρχουν παραπάνω από δύο τέτοιες ρίζες, κάνουμε ότι και στην προηγούμενη περίπτωση (2) που περιγράψαμε. Δεν απαιτείται γραφική παράσταση. A4, A5, B4/349, 350.
4. Είναι δυνατόν στις περιπτώσεις (2) και (3) να ζητείται ο υπολογισμός του εμβαδού μεταξύ της Cf του $\chi\chi'$ και της $\chi=\rho$ (περίπτωση 2) ή μεταξύ των Cf, Cg και των ευθειών $\chi=\rho, \chi=\kappa$. Απλώς τοποθετούμε στο άκρο ή τα άκρα του ολοκληρώματος τις αντίστοιχες τιμές και μελετάμε το πρόσημο των παραστάσεων μέσα στα απόλυτα στα διαστήματα που δημιουργούνται. B2, B5/350
5. Σε κάθε άλλη περίπτωση εκτός των παραπάνω, για να βρούμε το ζητούμενο εμβαδό, κατασκευάζουμε τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων που «αναμιγνύονται» στο πρόβλημα ή και των εφαπτόμενων ευθειών τους όπου αυτές ζητούνται στην εκφώνηση. Όλες των σελίδων 349-351 που δεν περιλήφθηκαν στις παραπάνω περιπτώσεις.
6. Ειδικά για την περίπτωση που ζητούν εμβαδόν που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f^{-1} , τον $\chi\chi'$ και κάποια άκρα, τότε δοκιμάστε να θέσετε στο αντίστοιχο ολοκλήρωμα $y = f^{-1}(x)$ και προχωρήστε στην αλλαγή μεταβλητής. Αν αυτό δεν δίνει λύση, χρειάζεστε γραφική παράσταση, οπότε πρέπει να αξιοποιήσετε την συμμετρία που έχουν οι f και f^{-1} ως προς την ευθεία $y=x$. Επισημαίνω την ισότητα : $\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x) dx = \int_a^b x \cdot f'(x) dx$ η οποία προκύπτει αν στον αρχικό τύπο θέσουμε $y = f^{-1}(x)$.