



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
«Ευαγόρας Παλληκαρίδης»

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ημερομηνία: 16/12/06

Ωρα εξέτασης: 09:30-12:30

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

1. Να βρείτε όλους τους τριψηφίους φυσικούς αριθμούς οι οποίοι όταν διαιρεθούν με το 5, 7 και 11 αφήνουν υπόλοιπο 2.

ΛΥΣΗ

$$\text{Έστω } a \text{ ένας τέτοιος αριθμός. Τότε θα έχουμε: } \left. \begin{array}{l} a = 5x + 2 \\ a = 7y + 2 \\ a = 11z + 2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} a - 2 = 5x \\ a - 2 = 7y \\ a - 2 = 11z \end{array} \right\} \text{ που}$$

σημαίνει ότι ο αριθμός $(a - 2)$ είναι κοινό πολλαπλάσιο των 5, 7, 11 και άρα

πολλαπλάσιο του ΕΚΠ(5, 7, 11) = 385.

Έτσι $a - 2 = 385$, $a - 2 = 770$, $a - 2 = 1155$, ...

Τελικά $a = 387$, $a = 772$

2. Να βρείτε πόσοι φυσικοί αριθμοί υπάρχουν ανάμεσα στους αριθμούς 1 και 9999 οι οποίοι δεν έχουν δύο ίδια ψηφία συνεχόμενα.

ΛΥΣΗ

Μονοψήφιοι: 1,2,3,4,5,6,7,8,9 (εκτός 0) $\Rightarrow$ 8 αριθμούς.

Διψήφιοι:

Πρώτο ψηφίο	Δεύτερο ψηφίο	Πλήθος αριθμών
1	Όλα εκτός το 1	9
2	Όλα εκτός το 2	9
3	Όλα εκτός το 3	9
4	Όλα εκτός το 4	9
5	Όλα εκτός το 5	9
6	Όλα εκτός το 6	9
7	Όλα εκτός το 7	9
8	Όλα εκτός το 8	9
9	Όλα εκτός το 9	9

$$\Rightarrow 9 \cdot 9 = \underline{81} \text{ αριθμούς}$$

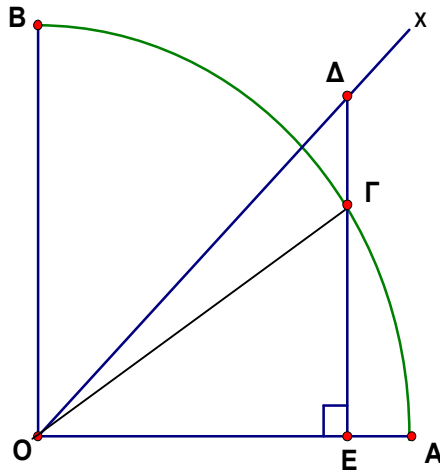
Ομοίως,

Τριψήφιοι: $9 \cdot 9 \cdot 9 = \underline{729}$ αριθμούς

Τετραψήφιοι: $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = \underline{6561}$ αριθμούς

$$\text{Άρα συνολικά έχουμε } 8 + 81 + 729 + 6561 = \underline{7379} \text{ αριθμούς.}$$

3. Στο σχήμα το ΑΟΒ είναι τεταρτοκύκλιο και η Οx είναι η διχοτόμος της ορθής γωνίας ΑΟΒ. Από το τυχαίο σημείο Γ του τόξου $\widehat{AB}$ φέρουμε $GE \perp OA$, που τέμνει τη διχοτόμο Οx στο Δ. Να αποδείξετε ότι $(GE)^2 + (\Delta E)^2 = (OA)^2$.



ΛΥΣΗ

Φέρουμε την ΟΓ.

Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα στ ορθογώνιο τρίγωνο ΟΓΕ. Έχουμε $(GE)^2 + (OE)^2 = (OG)^2$.

Επειδή το τρίγωνο ΟΔΕ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές $\Rightarrow OE = \Delta E$.

Επιπλέον $OG = OA$ (ακτίνες) $\Rightarrow (GE)^2 + (\Delta E)^2 = (OA)^2$

4. Να βρείτε όλα τα ζεύγη των φυσικών αριθμών χ και ψ που επαληθεύουν την εξίσωση: $\chi\psi^2 = 10000$.

ΛΥΣΗ

$\chi \cdot \psi^2 = 10000 = 10^4 = (2 \cdot 5)^4 = 2^4 \cdot 5^4$ άρα το χ και ψ είναι της μορφής: $\chi = 2^a \cdot 5^b$ και $\psi = 2^\gamma \cdot 5^\delta$ με α,β,γ και δ μη αρνητικοί ακέραιοι.

Συνεπώς $\chi \cdot \psi^2 = 2^a \cdot 5^b \cdot 2^{2\gamma} \cdot 5^{2\delta} = 2^{a+2\gamma} \cdot 5^{b+2\delta}$

Έτσι έχουμε $\chi \cdot \psi^2 = 2^{a+2\gamma} \cdot 5^{b+2\delta} = 2^4 \cdot 5^4 \Rightarrow \boxed{a+2\gamma = 4 \text{ και } b+2\delta = 4}$

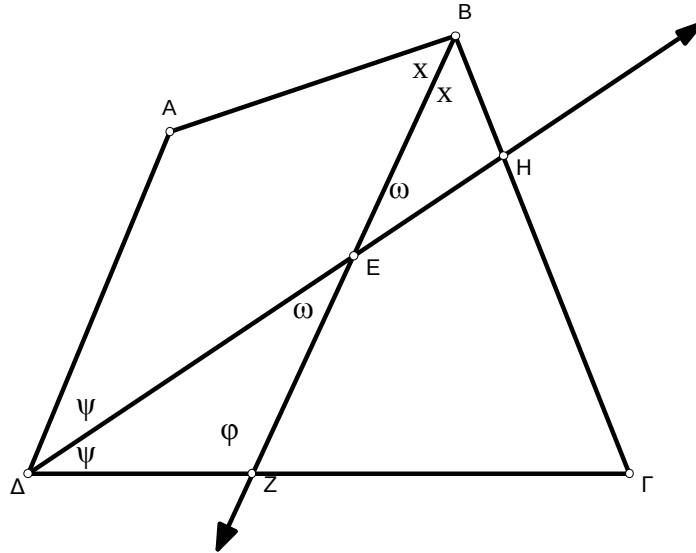
Κατασκευάζουμε τον πιο κάτω πίνακα:

α	β	γ	δ	$\chi = 2^a \cdot 5^b$	$\psi = 2^\gamma \cdot 5^\delta$	Λύση (χ,ψ)
0	0	2	2	1	$2^2 \cdot 5^2 = 100$	(1,100)
2	0	1	2	$2^2 = 4$	$2 \cdot 5^2 = 50$	(4,50)
0	2	2	1	$5^2 = 25$	$2^2 \cdot 5 = 20$	(25,20)
4	4	0	0	$2^4 \cdot 5^4 = 10000$	1	(10000,1)
2	2	1	1	$2^2 \cdot 5^2 = 100$	$2 \cdot 5 = 10$	(100,10)
4	0	0	2	$2^4 = 16$	$5^2 = 25$	(16,25)
4	2	0	1	$2^4 \cdot 5^2 = 16 \cdot 25 = 400$	5	(400,5)
0	4	2	0	$5^4 = 625$	$2^2 = 4$	(625,4)
2	4	1	0	$2^2 \cdot 5^4 = 4 \cdot 625 = 2500$	2	(2500,2)

$\Rightarrow$ Τα ζεύγη είναι: (1, 100), (4, 50), (25, 20), (10000, 1), (100, 10), (16, 25), (400, 5), (625, 4), (2500, 2).

5. Δίνεται το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{A} > \hat{\Gamma}$. Οι διχοτόμοι BZ και ΔH των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Delta}$ αντίστοιχα τέμνονται στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι $B\hat{E}H = \frac{\hat{A} - \hat{\Gamma}}{2}$.

ΛΥΣΗ



Θέτω $\frac{\hat{A}}{2} = \hat{x}$, $\frac{\hat{\Delta}}{2} = \hat{\psi}$, $\Delta\hat{Z}E = \hat{\phi}$ και $B\hat{E}H = \hat{\omega}$.

Στο τρίγωνο $\Delta\hat{E}Z$ έχουμε: $\hat{\phi} + \hat{\omega} + \hat{\psi} = 180^\circ$.

Επίσης $\hat{\phi} = \hat{x} + \hat{\Gamma}$, αφού $\hat{\phi}$ εξωτερική γωνιά του $B\hat{Z}\Gamma$.

Άρα $\hat{x} + \hat{\Gamma} + \hat{\omega} + \hat{\psi} = 180^\circ \Rightarrow \hat{x} + \hat{\psi} = 180^\circ - \hat{\Gamma} - \hat{\omega}$ (1)

$AB\Gamma\Delta$ τετράπλευρο άρα $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = 360^\circ \Rightarrow \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} + \frac{\hat{\Delta}}{2} = 180^\circ \Rightarrow \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} + \hat{x} + \hat{\psi} = 180^\circ$ (2)

Από τις (1) και (2) έχουμε $\frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} + 180^\circ - \hat{\Gamma} - \hat{\omega} = 180^\circ \Rightarrow \frac{\hat{A}}{2} - \frac{\hat{\Gamma}}{2} - \hat{\omega} = 0 \Rightarrow \frac{\hat{A} - \hat{\Gamma}}{2} = \hat{\omega} = B\hat{E}H$