ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ, ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2010

Β΄ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ημερομηνία: 06/11/10 Ώρα εξέτασης: 10:00 – 12:00

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης : $A=\dfrac{\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+1\right)^2}{\frac{2}{3}:\left(1-\frac{1}{9}\right)}$

β) Αν $\dfrac{a}{\beta}=\dfrac{11}{5}$, να βρείτε την τιμή της παράστασης : $\mathrm{B}=\dfrac{3\alpha-5\beta}{\alpha+5\beta}$

Λύση

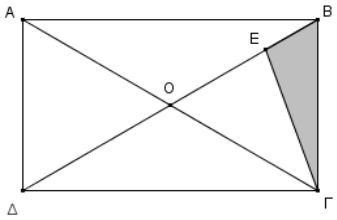
(α) $A=\dfrac{\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+1\right)^2}{\frac{2}{3}:\left(1-\frac{1}{9}\right)}=\dfrac{\frac{5}{4}\cdot\frac{9}{4}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{8}}=\mathbf{\dfrac{15}{4}}$

(β) *1ος τρόπος* $\mathrm{B}=\dfrac{3\alpha-5\beta}{\alpha+5\beta}=\dfrac{\frac{3\alpha-5\beta}{\beta}}{\frac{\alpha+5\beta}{\beta}}=\dfrac{3\frac{\alpha}{\beta}-5\frac{\beta}{\beta}}{\frac{\alpha}{\beta}+5\frac{\beta}{\beta}}=\dfrac{3\frac{11}{5}-5}{\frac{11}{5}+5}=\dfrac{33-25}{11+25}=\dfrac{8}{36}=\dfrac{2}{9}$

2ος τρόπος $\dfrac{a}{\beta}=\dfrac{11}{5}\Leftrightarrow\alpha=\dfrac{11}{5}\beta,\mathrm{B}=\dfrac{3\alpha-5\beta}{\alpha+5\beta}=\dfrac{3\frac{11}{5}\beta-5\beta}{\frac{11}{5}\beta+5\beta}=\dfrac{\frac{33\beta-25\beta}{5}}{\frac{11\beta+25\beta}{5}}=\dfrac{8\beta}{36\beta}=\dfrac{2}{9}$

ΘΕΜΑ 2

Στο πιο κάτω σχήμα το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Το ευθύγραμμο τμήμα ΟΕ είναι διπλάσιο του EB ($OE=2EB$), το ΔΓ είναι ίσο με 9cm και το εμβαδόν του τριγώνου ΕΒΓ είναι ίσο με 6cm^2. Να βρείτε το μήκος της πλευράς ΑΔ.



Λύση

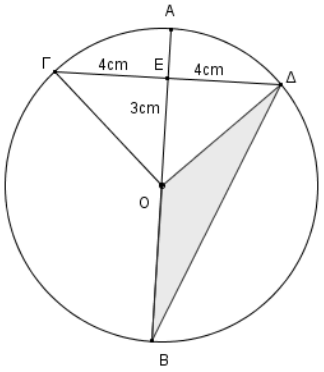
Το $\mathrm{EB}=\dfrac{1}{3}\mathrm{OB}=\dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{2}\Delta\mathrm{B})=\dfrac{1}{6}\Delta\mathrm{B}$ (Οι διαγώνιες του ορθογωνίου διχοτομούνται)

Το τρίγωνο ΑΔΒ έχει ίδιο ύψος και εξαπλάσια βάση από το τρίγωνο ΕΒΓ τότε το εμβαδόν του θα είναι εξαπλάσιο του τριγώνου ΕΒΓ δηλαδή είναι ίσο με 36cm^2.

$\mathrm{E}_{\mathrm{A\Delta B}}=\dfrac{\beta\cdot\upsilon}{2}\Leftrightarrow\quad 36=\dfrac{(\Delta\Gamma)\cdot 9}{2}\Leftrightarrow\quad \Delta\Gamma=8cm$

$\mathrm{A\Delta}=\Delta\Gamma=8cm$ (απέναντι πλευρές ορθογωνίου παραλληλογράμμου)

ΘΕΜΑ 3



Στον πιο κάτω κύκλο το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ είναι μια διάμετρός του. Αν ΟΕ = 3cm και ΓΕ = ΕΔ = 4cm να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΒΔ.

Λύση

Το τρίγωνο ΟΓΔ είναι ισοσκελές γιατί ΟΓ = ΟΔ = R .

Αφού το ευθύγραμμο τμήμα ΟΕ είναι διάμεσος του ισοσκελούς τριγώνου συνεπάγεται ότι είναι και ύψος του. Τότε το τρίγωνο ΕΟΔ είναι ορθογώνιο τρίγωνο .

Από Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΕΟΔ ισχύει :

$(\mathrm{O\Delta})^2 = (\mathrm{OE})^2 + (\mathrm{E\Delta})^2$, $R^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad R = 5cm$

ΟΒ=R=5cm , ΕΒ=ΕΟ+ΟΒ=3+5=8cm

α΄ τρόπος: $\mathrm{E}_{\Delta\mathrm{OB}} = \dfrac{\beta\cdot\upsilon}{2} = \dfrac{(\mathrm{OB})\cdot(\Delta\mathrm{E})}{2} = \dfrac{5\cdot 4}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{E}_{\Delta\mathrm{OB}} = 10cm^2$

β΄ τρόπος: $\mathrm{E}_{\Delta\mathrm{OB}} = E_{\Delta\mathrm{BE}} - \mathrm{E}_{\Delta\mathrm{EO}} = \dfrac{8\cdot 4}{2} - \dfrac{3\cdot 4}{2} = 10cm^2$

ΘΕΜΑ 4

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{10^2}\right)\cdot$$

Λύση

α΄ τρόπος $\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{4^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\dfrac{1}{10^2}\right) =$

$\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{9}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{16}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\dfrac{1}{100}\right) = \dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{8}{9}\cdot\dfrac{15}{16}\cdot\ldots\cdot\dfrac{99}{100} =$

$\dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\cdot\dfrac{2\cdot 4}{3\cdot 3}\cdot\dfrac{3\cdot 5}{4\cdot 4}\cdot\ldots\cdot\dfrac{8\cdot 10}{9\cdot 9}\cdot\dfrac{9\cdot 11}{10\cdot 10} = \mathbf{\dfrac{11}{20}}$

β΄ τρόπος $\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{4^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\dfrac{1}{10^2}\right) =$

$\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\dfrac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\dfrac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\dfrac{1}{4}\right)\cdot\left(1+\dfrac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\dfrac{1}{10}\right)\cdot\left(1\dfrac{1}{10}\right)$

$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\dfrac{9}{10}\cdot\dfrac{11}{10} = \mathbf{\dfrac{11}{20}}$