



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

«Ευαγόρας Παλληκαρίδης»

ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2011

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ημερομηνία: 10/12/2011 Ώρα εξέτασης: 9:30 -12:30

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως της απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΘΕΜΑΤΑ

1. Ένα έργο μπορεί να τελειώσει σε 30 ημέρες αν ο Άρης και ο Πάρης εργάζονται συγχρόνως. Το έργο ξεκίνησε και μετά από 6 ημέρες που εργάζονταν και οι δυο μαζί, ο Άρης εγκατέλειψε και ο Πάρης χρειάζεται ακόμη 40 μέρες για να τελειώσει το έργο. Να βρείτε πόσες μέρες θα χρειαζόταν ο καθένας για να τελειώσει το έργο από μόνος του.

Λύση

Ας είναι x αντίστοιχα y το μέρος του έργου που συμπληρώνει ο Άρης αντίστοιχα ο Πάρης σε μια μέρα. Τότε έχουμε

$$30x + 30y = 1 \text{ και } 6x + 6y + 40y = 1$$

Δηλαδή

$$30x + 30y = 1 \text{ και}$$

$$6x + 46y = 1$$

Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε $x = 1/75$, $y = 1/50$

Οπότε ο Άρης χρειάζεται 75 μέρες από μόνος του και ο Πάρης 50 μέρες.

2. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και ένα σημείο Δ μέσα στο τρίγωνο. Από το σημείο Δ φέρνουμε τις κάθετες πάνω στις πλευρές του τριγώνου και έστω E, Z, H τα σημεία τομής τους με τις πλευρές $AB, B\Gamma$ και ΓA αντίστοιχα. Αν $\Delta E = 1$, $\Delta Z = 2$ και $\Delta H = 3$ να υπολογίσετε την πλευρά AB .

Λύση:

Αν α ο μήκος της πλευράς και $υ$ το ύψος του ισοπλεύρου τριγώνου έχουμε την εξής σχέση για τα εμβαδά:

$$Εμβ(AB\Gamma) = Εμβ(B\Delta\Gamma) + Εμβ(\Gamma\Delta H) + Εμβ(A\Delta B)$$

Οπότε

$$\frac{\alpha \cdot υ}{2} = \frac{\alpha \cdot 2}{2} + \frac{\alpha \cdot 3}{2} + \frac{\alpha \cdot 1}{2}$$

Συνεπώς προκύπτει ότι $v = 6$ και άρα από το Πυθαγόρειο Θεώρημα $\alpha^2 = \frac{v^2}{4} + 6^2$
Οπότε $\alpha = 4\sqrt{3}$.

3. Να βρείτε το ψηφίο των μονάδων το πιο κάτω αθροίσματος:

$$23^{2011} + 37^{2011} + 64^{2011} + 88^{2011} =$$

Λύση:

Βλέπουμε ότι οι δυνάμεις του 23 έχουν ψηφίο των μονάδων που αντιστοιχεί στην ακολουθία 3,9,7,1,3,9,7,1,... . Αλλά $2011=502 \cdot 4+3$. Κατά συνέπεια ο πρώτος προσθετέος στο υπό μελέτη άθροισμα έχει ψηφίο μονάδων το 7.

Με τον ίδιο τρόπο για το 37 έχουμε την ακολουθία 7,9,3,1,7,9,3,1,... και το ψηφίο των μονάδων στο δεύτερο προσθετέο το 3.

Για το 64 έχουμε την ακολουθία 4,6,4,6,..., το $2011=1005 \cdot 2+1$ και ψηφίο των μονάδων του τρίτου προσθετέου το 4.

Για το 88 έχουμε την ακολουθία 8,4,2,6,8,4,2,6,... το $2011=502 \cdot 4+3$ και ως εκ τούτου ψηφίο των μονάδων στον τέταρτο προσθετέο το 2

Κατά συνέπεια, προσθέτοντας τα ψηφία των μονάδων των τεσσάρων προσθετέων έχουμε $7+3+4+2=16$, οπότε το ψηφίο των μονάδων στο δοθέν άθροισμα είναι το 6.

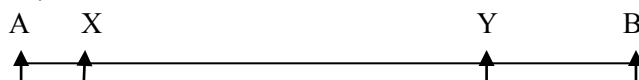
4. Δύο πόλεις Α και Β απέχουν 135Km μεταξύ τους. Τρία κορίτσια η Δώρα, η Μαρία και η Ρούλα ξεκινούν συγχρόνως από την πόλη Α για να πάνε στην πόλη Β. Περπατούν με σταθερή ταχύτητα 6Km/h και μπορούν να χρησιμοποιήσουν επίσης μια μοτοσυκλέτα που έχει σταθερή ταχύτητα 90Km/h και στην οποία μπορούν να καθίσουν δύο το πολύ άτομα. Έστω t ο χρόνος σε ώρες που χρειάζονται για να φτάσουν και οι τρείς στην πόλη Β. Να δείξετε ότι ο μικρότερος χρόνος t που χρειάζονται ικανοποιεί τη σχέση $t < 3,9h$. (Δεν λαμβάνονται υπόψη χρόνος για εκκίνηση, αλλαγή διεύθυνσης, μικρές στάσεις και τυχόν άλλες παρόμοιες καθυστερήσεις.

Λύση

Μια στρατηγική που θα μπορούσε να δώσει ένα πλαίσιο για να κινηθούν τα τρία άτομα (Δ, Μ, Ρ) από το σημείο Α στο σημείο Β κινούμενα όλα κάθε χρονική στιγμή και θα φτάσουν και τα τρία στο Β την ίδια στιγμή είναι η ακόλουθη:

- Δ και Μ ανεβαίνουν στη μοτοσυκλέτα ενώ η Ρ περπατά.
- Οι Δ και Μ φτάνουν με τη μοτοσυκλέτα σε ένα σημείο Υ πριν από το Β
- Η Δ αφήνει τη Μ και επιστρέφει πίσω ενώ οι Ρ και Μ συνεχίζουν να περπατούν προς το Β.
- Η Δ συναντά τη Ρ σε ένα σημείο Χ
- Η Δ παίρνει τη Ρ και τη βάζει στη μοτοσυκλέτα και ξεκινά και πάλι για να πάει προς το Β έτσι ώστε να ξανασυναντήσουν τη Μ στο Β.
- Το σημείο Υ επιλέγεται κατά τέτοιο τρόπο ώστε οι Δ, Μ και Ρ να φτάσουν ταυτόχρονα στο σημείο Β.

Ας συμβολίσουμε με α km την απόσταση ΑΧ με δ km την απόσταση ΧΥ και με β km την απόσταση ΥΒ.



Κατά το χρόνο που η Ρ περπατά από το Α στο Χ με ταχύτητα $6Km/h$, η Δ κινείται με τη μοτοσυκλέτα από το Α στο Υ και στη συνέχεια πίσω στο Χ με ταχύτητα $90Km/h$. Εφόσον οι χρόνοι των Ρ και Δ για να φτάσουν ταυτόχρονα στο Χ είναι ίσοι θα έχουμε

$$\frac{\alpha}{6} = \frac{\alpha+2\delta}{90} \quad \text{οπότε } 15\alpha = \alpha + 2\delta \text{ ή } 7\alpha = \delta.$$

Στο διάστημα που η Μ πρέπει να περπατήσει από το Υ στο Β, η Δ κινείται με τη μοτοσυκλέτα από το Υ στο Χ και πίσω στο Β, οπότε, αφού οι χρόνοι είναι οι ίδιοι,

$$\frac{\beta}{6} = \frac{\beta+2\delta}{90} \quad \text{οπότε } 15\beta = \beta + 2\delta \text{ ή } 7\beta = \delta.$$

Κατά συνέπεια θα είναι

$$\delta = 7\alpha = 7\beta \text{ και επομένως } \beta = \alpha$$

Αλλά $\alpha + \delta + \beta = 135$ οπότε $\alpha + 7\alpha + \alpha = 135$, δηλαδή $\alpha = 15km$

Τελικά λοιπόν βλέπουμε ότι η Δ κινήθηκε μια συνολική απόσταση

$$(\alpha + 7\alpha) + 7\alpha + (7\alpha + \alpha) = 23\alpha \text{ με ταχύτητα } 90Km/h$$

Άρα ο συνολικός χρόνος που χρειάστηκε με βάση αυτή την στρατηγική είναι

$$\frac{23 \cdot 15}{90} = \frac{23}{6} \approx 3,83 \text{ h}$$

Κατά συνέπεια αφού προσδιορίσαμε μια στρατηγική στην οποία ο χρόνος που μπορεί να επιτευχθεί το ζητούμενο είναι $3,83 \text{ h}$ προκύπτει ότι $t \leq 3,83$ και συνεπώς $t < 3,9$.