



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2012

B' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ημερομηνία: 08/12/2012

Ωρα εξέτασης: 09:30 -12:30

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα . Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΘΕΜΑΤΑ

1. Πόσοι από τους φυσικούς αριθμούς 1, 2, 3, 4, ..., 2013 δεν διαιρούνται ούτε με το 5, ούτε με το 7;

Το πλήθος των φυσικών αριθμών που διαιρούνται δια το 5 είναι $\left\lfloor \frac{2013}{5} \right\rfloor = 402$

Το πλήθος των φυσικών αριθμών που διαιρούνται δια το 7 είναι $\left\lfloor \frac{2013}{7} \right\rfloor = 287$

Το πλήθος των φυσικών αριθμών που διαιρούνται δια το $5 \cdot 7 = 35$ είναι $\left\lfloor \frac{2013}{35} \right\rfloor = 57$

Δηλαδή οι φυσικοί αριθμοί που διαιρούνται τουλάχιστον με ένα από τους αριθμούς 5 ή 7 είναι: $402 + 287 - 57 = 632$ και άρα αυτοί που δεν διαιρούνται είναι:

$$2013 - 632 = 1381$$

2. Σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $ABΓΔ$, αυξάνουμε το μήκος κατά 20%. Να βρείτε πόσο % θα πρέπει να μειώσουμε το πλάτος του, ώστε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου να παραμείνει το ίδιο.

Λύση(1η)

Αν το μήκος του ορθογώνιου παραλληλογράμμου είναι χ , τότε με την αύξηση κατά 20%, θα γίνει $(1, 20\chi)$. Αν το πλάτος του ψ , μειωθεί κατά α %, θα γίνει :

$\left(\psi - \frac{\alpha}{100} \psi\right) = \frac{\psi}{100} (100 - \alpha)$. Άρα, αφού τα δύο εμβαδά δεν θα αλλάξουν, θα πρέπει

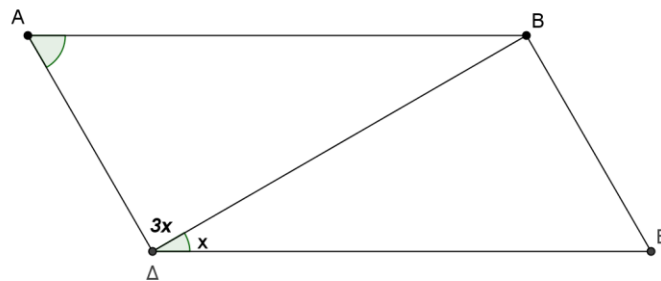
$$\chi\psi = 1, 20\chi \cdot \frac{\psi}{100} (100 - \alpha), \text{ δηλαδή } 100 = 1, 20(100 - \alpha) \Leftrightarrow 1, 20\alpha = 20$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{50}{3} = 16\frac{2}{3}. \text{ Δηλαδή θα πρέπει το πλάτος να μειωθεί κατά } 16\frac{2}{3}\%.$$

Λύση(2η)

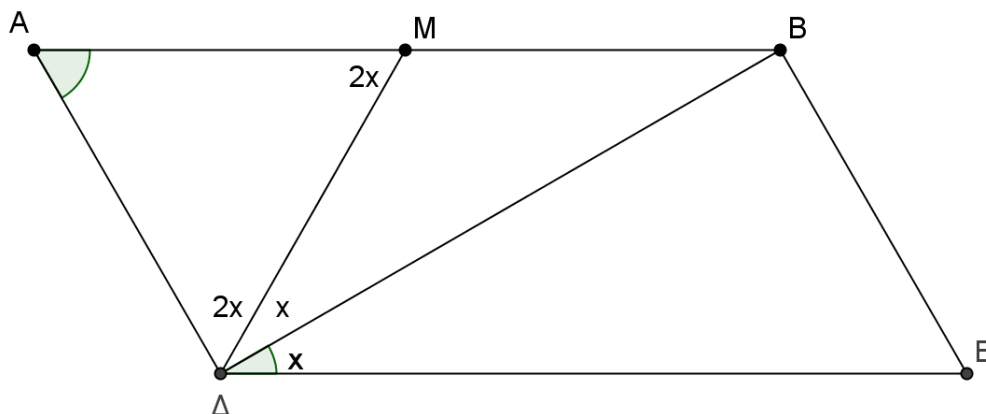
Με αύξηση κατά $20\% = \frac{1}{5}$, σημαίνει ότι το μήκος γίνεται $\frac{6}{5}\chi$. Αν το νέο πλάτος θα είναι $\alpha\psi$, θα έχουμε: $\left(\frac{6}{5}\chi\right) \cdot (\alpha\psi) = \chi\psi \rightarrow \alpha = \frac{5}{6}$. Άρα το νέο πλάτος από ψ , γίνεται $\frac{5}{6}\psi$ και επομένως μειώνεται κατά το $\frac{1}{6} = 16\frac{2}{3}\%$.

3. Στο πιο κάτω παραλληλόγραμμο $ABED$, η γωνία $A\Delta B$ είναι τριπλάσια της γωνίας $B\Delta E$ και το μήκος της πλευράς AB είναι διπλάσιο του μήκους της πλευράς $A\Delta$. Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας A του παραλληλογράμμου.



Λύση

Φέρουμε την ΔM , έτσι ώστε η γωνία $B\Delta M = \text{γωνία } B\Delta E = x$. Αφού η γωνία $A\Delta M$ είναι εντός εναλλάξ με την $M\Delta E = 2x$, άρα θα είναι και ίσες, διότι $AB \parallel \Delta E$. Το τρίγωνο $A\Delta M$ είναι ισοσκελές με $A\Delta = AM$ και αφού $A\Delta = \frac{1}{2}AB$, έχουμε M μέσο της AB . Το τρίγωνο $B\Delta M$, είναι επίσης ισοσκελές, διότι η γωνία $\Delta B M = x$ και άρα $(M\Delta = MB)$, άρα $BM = M\Delta = MA = A\Delta$, δηλαδή το τρίγωνο $A\Delta M$ είναι τελικά ισόπλευρο και έτσι: $A = 60^\circ$.



4. Να βρείτε όλους τους ακέραιους x, y για τους οποίους ισχύει: $\begin{cases} x^2 + xy = 12 \\ y^2 + xy = 4 \end{cases}$

Λύση(1)

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο εξισώσεις έχουμε:

$$x^2 + 2xy + y^2 = 16 \Leftrightarrow (x + y)^2 = 16 \Leftrightarrow x + y = \pm 4. \text{ Από την 1η εξίσωση}$$

$$x^2 + xy = 12 \Leftrightarrow x(x + y) = 12 \text{ και άρα } x(\pm 4) = 12 \Leftrightarrow x = \pm 3, \text{ οπότε και οι αντίστοιχες τιμές του } y = \pm 1. \text{ Λύσεις: } (3, 1), (-3, -1).$$

Λύση(2)

$$\begin{cases} x^2 + xy = 12 \\ y^2 + xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x + y) = 12 \\ y(y + x) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x}{y} = 3 \text{ (διαίρεση κατά μέλη), και άρα: } x = 3y$$

$$\text{και έτσι η 1η εξίσωση μετατρέπεται σε } (3y)^2 + 3y \cdot y = 12 \Leftrightarrow 12y^2 = 12 \Leftrightarrow y = \pm 1 \text{ και τα αντίστοιχα } x = \pm 3.$$

Λύση(3)

$$\text{Αφαιρώντας κατά μέλη τις 2 εξισώσεις, έχουμε: } x^2 - y^2 = 8 \Leftrightarrow (x - y)(x + y) = 8$$

Επειδή τα x, y είναι ακέραιοι άρα και τα $(x - y), (x + y)$ ακέραιοι, οπότε και διακρίνουμε τις περιπτώσεις

$$\begin{cases} (x - y) = 1 \\ (x + y) = 8 \end{cases}, \begin{cases} (x - y) = -1 \\ (x + y) = -8 \end{cases}, \begin{cases} (x - y) = 2 \\ (x + y) = 4 \end{cases}, \begin{cases} (x - y) = -2 \\ (x + y) = -4 \end{cases}. \text{ Τα δύο πρώτα}$$

συστήματα είναι αδύνατα διότι δεν δίνουν ακέραιες λύσεις ενώ τα δύο τελευταία μας δίνουν και πάλι τις λύσεις : $(3, 1), (-3, -1)$.