



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2012

B' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ημερομηνία: 10/11/2012

Ωρα εξέτασης: 10:00 -12:00

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα . Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

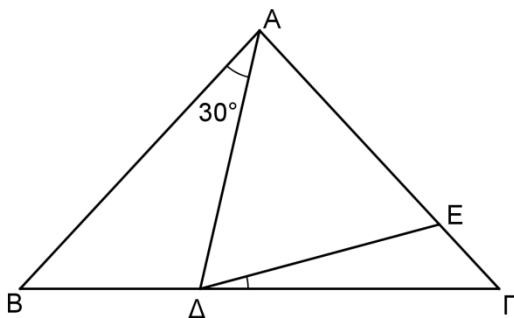
ΘΕΜΑΤΑ

1. Ο αριθμός a είναι το γινόμενο $132 \cdot N$, όπου N θετικός ακέραιος αριθμός. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του N ώστε ο a να είναι τέλειο τετράγωνο.

Λύση:

Ο αριθμός a μπορεί να γραφεί στην μορφή $a = 132 \cdot N = 2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot N$. Για να είναι ο a τέλειο τετράγωνο, πρέπει ο N να είναι αριθμός της μορφής $N = 3 \cdot 11 \cdot \omega^2$, όπου ω ακέραιος. Συνεπώς, η ελάχιστη τιμή του N είναι $3 \cdot 11 = 33$.

2. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Στην πλευρά $B\Gamma$ παίρνουμε σημείο Δ ώστε $B\hat{A}\Delta = 30^\circ$. Αν E σημείο της $A\Gamma$ τέτοιο ώστε $A\Delta = AE$, να υπολογίσετε τη γωνία $E\hat{\Delta}\Gamma$.



Λύση:

$$\begin{cases} A\hat{\Delta}E + E\hat{\Delta}\Gamma = A\hat{B}\Gamma + 30^\circ \\ A\hat{E}\Delta = E\hat{\Delta}\Gamma + E\hat{\Gamma}\Delta \\ A\hat{\Delta}E = A\hat{E}\Delta \\ A\hat{B}\Gamma = E\hat{\Gamma}\Delta \end{cases} \Rightarrow 2 \cdot E\hat{\Delta}\Gamma + E\hat{\Gamma}\Delta = E\hat{\Gamma}\Delta + 30^\circ \Rightarrow E\hat{\Delta}\Gamma = 15^\circ$$

3. Τα x, y και ω είναι ψηφία. Ο τριψήφιος $\overline{x\gamma\omega}$ είναι διαιρετός με το 3, ο τριψήφιος $\overline{y\chi\omega}$ είναι διαιρετός με το 4 και ο τριψήφιος $\overline{y\omega\chi}$ είναι διαιρετός με το 5. Επίσης, ο τριψήφιος $\overline{\omega\gamma\chi}$ έχει άρτιο αριθμό παραγόντων (διάφορων του 1). Να βρείτε τον αριθμό $\overline{x\gamma\omega}$.

Λύση:

Ο τριψήφιος $\overline{y\omega\chi}$ είναι διαιρετός με το 5. Συνεπώς, $x = 0$ ή $x = 5$. Το $x = 0$ αποκλείεται, αφού ο $\overline{x\gamma\omega}$ είναι τριψήφιος. Άρα, $x = 5$.

Αφού ο τριψήφιος $\overline{y\chi\omega}$ είναι διαιρετός με το 4, έχουμε ότι ο $10x + \omega = 50 + \omega$ είναι πολλαπλάσιο του 4. Συνεπώς, $\omega = 2$ ή $\omega = 6$.

Αν $\omega = 2$, έχουμε $y = 2, y = 5$ ή $y = 8$. Αν $\omega = 6$, έχουμε $y = 1, y = 4$ ή $y = 7$. Άρα, υπάρχουν 6 περιπτώσεις για τον τριψήφιο $\overline{\omega\gamma\chi}$: 225, 255, 285, 615, 645, 675.

Από τους πιο πάνω αριθμούς, μόνο ο $225 = 3^2 \cdot 5^2$ έχει άρτιο αριθμό παραγόντων.

Ο αριθμός $\overline{x\gamma\omega}$ είναι ο 522.

4. Αν $\frac{8^x+27^x}{12^x+18^x} = \frac{7}{6}$, να βρείτε το x .

Λύση:

Αν $2^x = a$ και $3^x = \beta$, τότε

$$\frac{a^3 + \beta^3}{a^2\beta + a\beta^2} = \frac{7}{6} \Rightarrow \frac{(a + \beta)(a^2 - a\beta + \beta^2)}{a\beta(a + \beta)} = \frac{7}{6} \Rightarrow 6a^2 - 13a\beta + 6\beta^2 = 0$$

$$\Rightarrow 6a^2 - 9a\beta - 4a\beta + 6\beta^2 = 0 \Rightarrow 3a(2a - 3\beta) - 2\beta(2a - 3\beta) = 0$$

$$\Rightarrow (2a - 3\beta)(3a - 2\beta) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3\beta}{2} \Rightarrow 2^x = \frac{3}{2} \cdot 3^x \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \Rightarrow x = -1 \\ a = \frac{2\beta}{3} \Rightarrow 2^x = \frac{2}{3} \cdot 3^x \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^1 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$