



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2014

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ημερομηνία: 08/11/2014

Ώρα Εξέτασης: 10:00 -12:00

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

- 1) Ο μισθός του Νίκου είναι €360 την εβδομάδα για εργασία 44 ωρών. Αν ο εβδομαδιαίος μισθός του Νίκου αυξηθεί κατά 10% και οι ώρες εργασίας μειωθούν κατά 10% , να υπολογίσετε το νέο ωριαίο μισθό το Νίκου.

Προτεινόμενη Λύση

$$360 + 360 \cdot \frac{10}{100} = 360 + 36 = 396$$

$$44 - 44 \cdot \frac{10}{100} = 44 - 4,4 = 39,6$$

$$\frac{396}{39,6} = 10 \quad \text{Άρα ο Νίκος θα παίρνει €10 την ώρα}$$

- 2) α) Αν ισχύει ότι: $\frac{3}{\alpha} + \frac{\beta}{6} + \frac{4}{\gamma} = \frac{5}{6}$,

Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $\Gamma = \frac{9-\alpha}{3\alpha} + \frac{2\beta-3}{12} + \frac{16+2\gamma}{4\gamma}$

β) Να υπολογίσετε: $A = 2^{2014} - (2^{2013} + 2^{2012} + 2^{2011} + \dots + 2^3 + 2^2 + 2 + 1)$

Προτεινόμενη Λύση

$$\begin{aligned} \alpha) \quad \Gamma &= \frac{9-\alpha}{3\alpha} + \frac{2\beta-3}{12} + \frac{16+2\gamma}{4\gamma} = \frac{9}{3\alpha} - \frac{\alpha}{3\alpha} + \frac{2\beta}{12} - \frac{3}{12} + \frac{16}{4\gamma} + \frac{2\gamma}{4\gamma} \\ &= \frac{3}{\alpha} - \frac{1}{3} + \frac{\beta}{6} - \frac{1}{4} + \frac{4}{\gamma} + \frac{1}{2} = \left(\frac{3}{\alpha} + \frac{\beta}{6} + \frac{4}{\gamma} \right) - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{10-4-3+6}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

β) Να υπολογίσετε: $A = 2^{2014} - (2^{2013} + 2^{2012} + 2^{2011} + \dots + 2^3 + 2^2 + 2 + 1)$

Προτεινόμενη Λύση

α' τρόπος

$$2 \cdot A = 2 \cdot 2^{2014} - 2 \cdot (2^{2013} + 2^{2012} + 2^{2011} + \dots + 2^3 + 2^2 + 2 + 1)$$

$$2 \cdot A = 2^{2015} - 2^{2014} - 2^{2013} - 2^{2012} - \dots - 2^4 - 2^3 - 2^2 - 2$$

$$A = 2 \cdot A - A =$$

$$= 2^{2015} - 2^{2014} - 2^{2013} - 2^{2012} - \dots - 2^2 - 2 - 2^{2014} + 2^{2013} + 2^{2012} + 2^{2011} + \dots + 2^2 + 2 + 1$$

$$= 2^{2015} - 2^{2014} - 2^{2014} + 1 = 2^{2015} - 2 \cdot 2^{2014} + 1 = 2^{2015} - 2^{2015} + 1 = 1$$

β' τρόπος

$$A = 2^{2014} - 2^{2013} - 2^{2012} - 2^{2011} - \dots - 2^3 - 2^2 - 2 - 1 =$$

$$= (2 \cdot 2^{2013} - 2^{2013}) - 2^{2012} - 2^{2011} - \dots - 2^3 - 2^2 - 2 - 1 = 2^{2013} - 2^{2012} - 2^{2011} - \dots - 2^3 - 2^2 - 2 - 1$$

$$= (2 \cdot 2^{2012} - 2^{2012}) - 2^{2011} - \dots - 2^3 - 2^2 - 2 - 1 = \dots = 1$$

- 3) Υπάρχουν δύο αδέρφια ο Κώστας και ο Γιάννης. Η ηλικία του Κώστα είναι μεταξύ 30 και 40 χρονών, και η ηλικία του Γιάννη, είναι μεταξύ 40 και 50 χρονών. Το γινόμενο των ηλικιών τους είναι τέλειος κύβος. Να βρείτε το άθροισμα των ηλικιών τους.

Προτεινόμενη Λύση

Αφού η ηλικία του Κώστα είναι μεταξύ 30 και 40

και η ηλικία του Γιάννη είναι μεταξύ 40 και 50

τότε το γινόμενο των ηλικιών τους είναι μεταξύ 1200 και 2000

άρα αναζητώ ένα τέλειο κύβο μεταξύ 1200 και 2000

$$10^3 = 1000, 11^3 = 1331, 12^3 = 1728$$

Το 11^3 απορρίπτεται γιατί το 11 είναι πρώτος αριθμός ενώ

$$12^3 = (2^2 \cdot 3)^3 = 2^6 \cdot 3^3 = (2^2 \cdot 3^2)(2^4 \cdot 3) = 36 \cdot 48$$

Άρα ο Κώστας είναι 36 χρονών και ο Γιάννης 48 χρονών.

Το άθροισμα των ηλικιών τους είναι $36 + 48 = 84$

4) Στο πιο κάτω σχήμα τα τετράγωνα ΑΒΓΔ και ΕΔΗΖ είναι ίσα με εμβαδόν 16cm^2 το κάθε ένα. Αν Θ είναι το μέσο της ΒΓ και ΕΖ, να βρείτε το εμβαδόν ΑΒΘΖΗΔΑ.

Προτεινόμενη Λύση

Το εμβαδόν του κάθε τετραγώνου είναι 16cm^2 τότε $AB = EZ = 4\text{cm}$.

Φέρνω το ευθύγραμμο τμήμα ΘΔ, τότε σχηματίζονται δύο ίσα ορθογώνια τρίγωνα ΕΔΘ και ΘΔΓ.

Το Θ αφού είναι το μέσον των ΕΖ και ΒΓ τότε $ΕΘ = ΘΓ = 2\text{cm}$.

$$\text{Το } E_{\Theta ΕΔ} = E_{\Theta ΓΔ} = \frac{\beta \cdot \upsilon}{2} = \frac{2 \cdot 4}{2} = 4\text{cm}^2$$

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E = E_{ΑΒΓΔ} + E_{ΕΖΗΔ} - E_{\Theta ΓΔ} - E_{\Theta ΕΔ} = 2 \cdot 16 - 2 \cdot 4 = 24\text{cm}^2$$

