



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2015

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ημερομηνία: 12/12/2015

Ώρα Εξέτασης: 09:30 - 12:30

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

Προτεινόμενες Λύσεις

Πρόβλημα 1

Οι αριθμοί 95, 238 και 260 όταν διαιρεθούν με τον θετικό ακέραιο αριθμό β , αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο και στις τρεις περιπτώσεις. Ποιο είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του 117 με τον αριθμό β ;

Προτεινόμενη Λύση

Οι αριθμοί 95, 238 και 260 όταν διαιρεθούν με τον θετικό ακέραιο αριθμό β , αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο και στις τρεις περιπτώσεις. Συνεπώς, ο β διαιρεί τις διαφορές των αριθμών αυτών ανά δύο, δηλαδή ο β είναι διαιρέτης των αριθμών $238 - 95 = 143$, $260 - 95 = 165$ και $260 - 238 = 22$. Είναι:

- $143 = 11 \cdot 13$
- $165 = 3 \cdot 5 \cdot 11$
- $22 = 2 \cdot 11$

Παρατηρούμε ότι οι μόνοι κοινοί διαιρέτες των αριθμών 22, 143 και 165 είναι οι αριθμοί 1 και 11.

(α) Αν $\beta = 1$, τότε το υπόλοιπο της διαίρεσης του 117 με το 1 είναι 0.

(β) Αν $\beta = 11$, τότε το υπόλοιπο της διαίρεσης του 117 με το 11 είναι 7.

Πρόβλημα 2

Να δείξετε ότι ο αριθμός

$$A = (\sqrt{2} - \sqrt{10}) \cdot (3 + \sqrt{5}) \cdot \sqrt{3 - \sqrt{5}}$$

είναι ακέραιος.

Προτεινόμενη Λύση

Παρατηρούμε ότι $A < 0$. Θα υπολογίσουμε τον A^2 . Είναι:

$$\begin{aligned}
 A^2 &= (\sqrt{2} - \sqrt{10})^2 \cdot (3 + \sqrt{5})^2 \cdot \left(\sqrt{3 - \sqrt{5}}\right)^2 = (2 - 2\sqrt{2}\sqrt{10} + 10) \cdot (9 + 6\sqrt{5} + 5) \cdot (3 - \sqrt{5}) \\
 &= (12 - 4\sqrt{5}) \cdot (14 + 6\sqrt{5}) \cdot (3 - \sqrt{5}) = 4 \cdot (3 - \sqrt{5})^2 \cdot (14 + 6\sqrt{5}) \\
 &= 4 \cdot (9 - 6\sqrt{5} + 5) \cdot (14 + 6\sqrt{5}) = 4 \cdot (14 - 6\sqrt{5}) \cdot (14 + 6\sqrt{5}) \\
 &= 4 \cdot (196 - 180) = 4 \cdot 16 = 64
 \end{aligned}$$

Αφού $A^2 \in \mathbb{Z}$, έχουμε $A \in \mathbb{Z}$ (συγκεκριμένα $A = -8$).

Πρόβλημα 3

Αν $f(x) = x^3 - \lambda x + 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$, να υπολογιστεί η τιμή του λ , ώστε το πολυώνυμο

$$\varphi(x) = f(x+1) + 2f(x-2) - f(x)$$

να διαιρείται με το $x - 1$.

Προτεινόμενη Λύση

Το $x - 1$ διαιρεί το πολυώνυμο $\varphi(x)$. Συνεπώς, το 1 είναι ρίζα του $\varphi(x)$, δηλαδή $\varphi(1) = 0$. Είναι:

$$\varphi(1) = f(2) + 2f(-1) - f(1) = 0 \quad (1)$$

Έχουμε:

- $f(2) = 8 - 2\lambda + 1 = 9 - 2\lambda$
- $f(-1) = -1 + \lambda + 1 = \lambda$
- $f(1) = 1 - \lambda + 1 = 2 - \lambda$

Συνεπώς, από την (1), είναι:

$$9 - 2\lambda + 2\lambda - 2 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -7$$

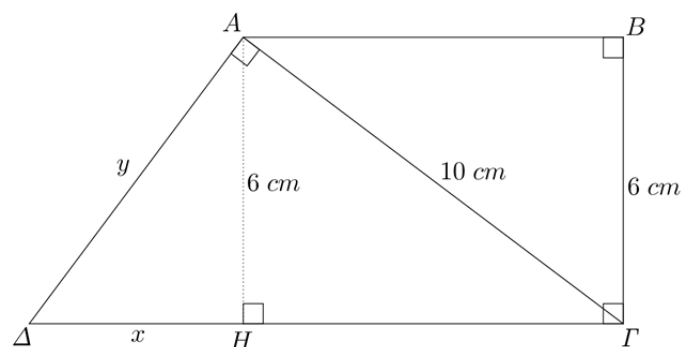
Πρόβλημα 4

Δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($\angle B = \angle \Gamma = 90^\circ$). Η διαγώνιος $A\Gamma$ είναι κάθετη στην AD στο σημείο A . Αν $(B\Gamma) = 6 \text{ cm}$ και $(A\Gamma) = 10 \text{ cm}$, να βρείτε το εμβαδόν και την περίμετρο του τραπέζιου $AB\Gamma\Delta$.

Προτεινόμενη Λύση

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε:

$$(AB)^2 + (B\Gamma)^2 = (A\Gamma)^2 \Leftrightarrow (AB)^2 = 100 - 36 = 64 \Leftrightarrow (AB) = \sqrt{64} = 8 \text{ cm}$$



Φέρουμε την $AH \perp \Delta\Gamma$ και έστω $\Delta H = x, A\Delta = y$. Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta H$ έχουμε:

$$y^2 = x^2 + (AH)^2 \Leftrightarrow y^2 = x^2 + 36 \quad (1)$$

Επιπλέον, από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $(A\Delta\Gamma)$ έχουμε:

$$y^2 + 100 = (x + 8)^2 \quad (2)$$

Από (1) και (2), έχουμε:

$$x^2 + 36 + 100 = (x + 8)^2 \Leftrightarrow x^2 + 136 = x^2 + 16x + 64 \Leftrightarrow 16x = 72 \Leftrightarrow x = \frac{9}{2} \text{ cm}$$

$$y^2 = \frac{81}{4} + 36 = \frac{225}{4} \Leftrightarrow y = \frac{15}{2} \text{ cm}$$

Το εμβαδόν του ορθογωνίου τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$ είναι:

$$(AB\Gamma\Delta) = \frac{\left(8 + \frac{25}{2}\right) \cdot 6}{2} = \frac{41}{2} \cdot 3 = \frac{123}{2} = 61,5 \text{ cm}^2$$

Τέλος, η περίμετρος του ορθογωνίου τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$ είναι:

$$\Pi_{AB\Gamma\Delta} = 8 + 6 + \frac{25}{2} + \frac{15}{2} = 34 \text{ cm}$$