



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2016

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ημερομηνία: 10/12/2016

Ώρα Εξέτασης: 09:30-12:30

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Πρόβλημα 1

Αν a, β, γ και δ είναι τέσσερις **διαφορετικοί** αριθμοί από το σύνολο

$$A = \left\{-10, -7, -\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{4}, 1, 2, 8\right\},$$

να υπολογίσετε τη **μέγιστη** και την **ελάχιστη θετική** τιμή που μπορεί να πάρει η παράσταση:

$$B = \frac{a + \beta}{\gamma - \delta}$$

Προτεινόμενη Λύση

Η μέγιστη θετική τιμή της παράστασης B λαμβάνεται με έναν από τους πιο κάτω τρόπους:

- Ο αριθμητής $a + \beta$ να είναι ο μεγαλύτερος θετικός αριθμός που προκύπτει και ο παρονομαστής $\gamma - \delta$ να είναι ο μικρότερος θετικός αριθμός που προκύπτει με αριθμούς μέσα από το σύνολο A . Δηλαδή:

$$a + \beta = 8 + 2 = 10, \quad \gamma - \delta = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}, \quad B = \frac{10}{\frac{1}{4}} = 40$$

- Ο αριθμητής $a + \beta$ να είναι ο μικρότερος αρνητικός αριθμός που προκύπτει και ο παρονομαστής $\gamma - \delta$ να είναι ο μεγαλύτερος αρνητικός αριθμός που προκύπτει με αριθμούς μέσα από το σύνολο A . Δηλαδή:

$$a + \beta = -10 - 7 = -17, \quad \gamma - \delta = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}, \quad B = \frac{-17}{-\frac{1}{4}} = 68$$

Επομένως, η μέγιστη θετική τιμή της παράστασης B είναι $B_{max} = 68$.

Η ελάχιστη θετική τιμή της παράστασης B λαμβάνεται με έναν από τους πιο κάτω τρόπους:

- Ο αριθμητής $a + \beta$ να είναι ο μικρότερος θετικός αριθμός που προκύπτει και ο παρονομαστής $\gamma - \delta$ να είναι ο μεγαλύτερος θετικός αριθμός που προκύπτει με αριθμούς μέσα από το σύνολο A . Δηλαδή:

$$a + \beta = -\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{1}{4}, \quad \gamma - \delta = 8 - (-10) = 18, \quad B = \frac{\frac{1}{4}}{18} = \frac{1}{72}$$

- Ο αριθμητής $a + \beta$ να είναι ο μεγαλύτερος αρνητικός αριθμός που προκύπτει και ο παρονομαστής $\gamma - \delta$ να είναι ο μικρότερος αρνητικός αριθμός που προκύπτει με αριθμούς μέσα από το σύνολο A . Δηλαδή:

$$a + \beta = -\frac{1}{2} + 0 = -\frac{1}{2}, \quad \gamma - \delta = -10 - 8 = -18, \quad B = \frac{-\frac{1}{2}}{-18} = \frac{1}{36}$$

Επομένως, η ελάχιστη θετική τιμή της παράστασης B είναι $B_{min} = \frac{1}{72}$.

Πρόβλημα 2

Τρεις φίλοι αγόρασαν από μια μοτοσικλέτα A, B και Γ . Για την εξόφληση των μοτοσικλετών, ο πωλητής ζήτησε από τον καθένα να του δώσει αρχικά μια προκαταβολή και στη συνέχεια να πληρώνει μια συγκεκριμένη δόση κάθε μήνα. Οι τρεις φίλοι έδωσαν το ίδιο ποσό χρημάτων για προκαταβολή και θα πληρώνουν την ίδια μηνιαία δόση. Το ποσό της μηνιαίας δόσης είναι ακέραιος αριθμός μεγαλύτερος από €100. Αν το συνολικό κόστος των μοτοσικλετών είναι €3000 για την A , €3315 για την B και €3840 για την Γ , να υπολογίσετε το ποσό της μηνιαίας δόσης.

Προτεινόμενη Λύση

Ονομάζουμε με x το ποσό που δόθηκε για προκαταβολή και με y το ποσό της μηνιαίας δόσης, όπου x, y θετικοί ακέραιοι αριθμοί, $y > 100$.

Έχουμε:

$$\begin{cases} y \mid 3000 - x & (1) \\ y \mid 3315 - x & (2) \\ y \mid 3840 - x & (3) \end{cases}$$

Από τις (1) και (2) παίρνουμε:

$$y \mid (3315 - x) - (3000 - x) \Rightarrow y \mid 315 \quad (4)$$

Από τις (1) και (3) παίρνουμε:

$$y \mid (3840 - x) - (3000 - x) \Rightarrow y \mid 840 \quad (5)$$

Από τις (4) και (5) συμπεραίνουμε ότι ο y διαιρεί τον μέγιστο κοινό διαιρέτη των 315 και 525.

Έχουμε:

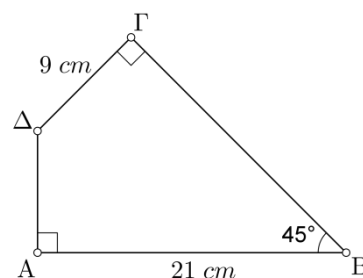
$$\left. \begin{array}{l} 315 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \\ 525 = 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \end{array} \right\} \Rightarrow MKΔ(315, 525) = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$$

Τελικά, συμπεραίνουμε ότι αφού ο y διαιρεί τον 105 και $y > 100$, τότε $y = 105$.

Πρόβλημα 3

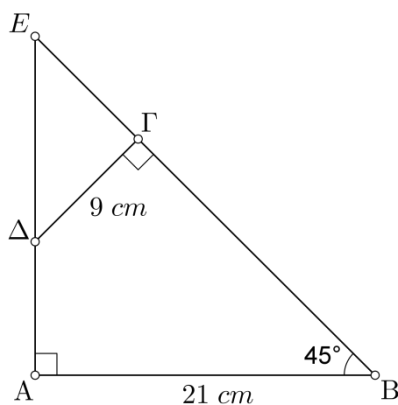
Στο διπλανό σχήμα δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $\angle B\Delta\Delta = \angle B\Gamma\Delta = 90^\circ$, $\angle AB\Gamma = 45^\circ$, $(AB) = 21\text{ cm}$ και $(\Gamma\Delta) = 9\text{ cm}$.

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$.



Προτεινόμενη Λύση

Προεκτείνουμε τα ευθύγραμμα τμήματα $A\Delta$ και $B\Gamma$ προς το μέρος των Δ και Γ , αντίστοιχα, και ονομάζουμε E το σημείο τομής των δύο προεκτάσεων, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.



Από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ABE , έχουμε $\angle BEA = 45^\circ$. Άρα, το τρίγωνο ABE είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με $(AE) = (AB) = 21\text{ cm}$.

Ομοίως, από το τρίγωνο $\Gamma\Delta E$ έχουμε $\angle \Gamma\Delta E = 45^\circ$ και $(\Gamma E) = (\Gamma\Delta) = 9\text{ cm}$.

Άρα,

$$E_{AB\Gamma\Delta} = E_{ABE} - E_{\Gamma\Delta E} = \frac{21 \cdot 21}{2} - \frac{9 \cdot 9}{2} = \frac{441 - 81}{2} = \frac{360}{2} = 180\text{ cm}^2$$

Πρόβλημα 4

(α) Να βρείτε σταθερούς πραγματικούς αριθμούς A, B , ώστε να ισχύει:

$$\frac{1}{v(v+1)} = \frac{A}{v} + \frac{B}{v+1}, \quad \text{για κάθε φυσικό αριθμό } v$$

(β) Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$S_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{2016 \cdot 2017}$$

(γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$S_2 = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{2015 \cdot 2017}$$

Προτεινόμενη Λύση

(α) Έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v(v+1)} &= \frac{A}{v} + \frac{B}{v+1} \Rightarrow A(v+1) + Bv = 1 \\ &\Rightarrow (A+B)v + A = 1 \end{aligned}$$

Δοκιμάζουμε τις τιμές $A = 1, B = -1$. Πράγματι:

$$\frac{1}{v} - \frac{1}{v+1} = \frac{v+1-v}{v(v+1)} = \frac{1}{v(v+1)}, \text{ για κάθε φυσικό αριθμό } v$$

Άλλος τρόπος

$$\frac{1}{v(v+1)} = \frac{1+v-v}{v(v+1)} = \frac{v+1}{v(v+1)} - \frac{v}{v(v+1)} = \frac{1}{v} - \frac{1}{v+1}, \text{ για κάθε φυσικό αριθμό } v$$

Άρα, $A = 1, B = -1$.

(β) Χρησιμοποιώντας τη σχέση που αποδείξαμε στο (α) ερώτημα για τον κάθε όρο του αθροίσματος S_1 , έχουμε:

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{2016 \cdot 2017} \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2016} - \frac{1}{2017}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2017} = \frac{2016}{2017} \end{aligned}$$

(γ) Δουλεύοντας με όμοιο τρόπο όπως στο (α) ερώτημα, αποδεικνύουμε εύκολα ότι:

$$\frac{1}{v(v+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v+2} \right), \text{ για κάθε φυσικό αριθμό } v$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση αυτή για τον κάθε όρο του αθροίσματος S_2 , έχουμε:

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{2015 \cdot 2017} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \cdots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2015} - \frac{1}{2017} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2017} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2016}{2017} = \frac{1008}{2017} \end{aligned}$$