



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ημερομηνία: 08/12/2018

Ώρα Εξέτασης: 09:30-12:30

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Πρόβλημα 1

Ο Γιάννης πώλησε το αυτοκίνητο του στον Κώστα με έκπτωση 10%. Στη συνέχεια ο Κώστας το πώλησε στον Αντρέα με έκπτωση 20%. Ο Αντρέας το πώλησε στον Δημήτρη με κέρδος 20% και ο Δημήτρης αφού το έφτιαξε λίγο και το περιποιήθηκε (χωρίς πρόσθετο κόστος) άρεσε στον Γιάννη που το είχε αρχικά και του το ζήτησε να το αγοράσει πίσω. Ο Δημήτρης το πώλησε τελικά στον Γιάννη προς €9504, έχοντας έτσι κέρδος 10%.

Ποια ήταν η αρχική αξία του αυτοκινήτου;

Προτεινόμενη Λύση

Αν η αρχική αξία του αυτοκινήτου είναι € x τότε ο Γιάννης το πωλεί στον Κώστα προς $\frac{90}{100}x$.

Ο Κώστας το πωλεί στον Αντρέα προς $\frac{90}{100}x \cdot \frac{80}{100}$.

Ο Αντρέας το πωλεί στον Δημήτρη προς $\frac{90}{100}x \cdot \frac{80}{100} \cdot \frac{120}{100}$.

Ο Δημήτρης το πωλεί πίσω στον Γιάννη προς $\frac{90}{100}x \cdot \frac{80}{100} \cdot \frac{120}{100} \cdot \frac{110}{100}$ το οποίο και ισούται με €9504

Έτσι

$$\frac{90}{100}x \cdot \frac{80}{100} \cdot \frac{120}{100} \cdot \frac{110}{100} = 9504 \Rightarrow \frac{9}{10} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{11}{10}x = 9504 \Rightarrow \frac{594}{625}x = 9504 \Rightarrow x = 9504 \div \frac{594}{625} \\ \Rightarrow x = 10000.$$

Πρόβλημα 2

- (α) Να βρείτε 3 διαφορετικούς θετικούς ακέραιους αριθμούς ώστε κάθε ένας από αυτούς να διαιρεί το άθροισμα τους.
- (β) Να βρείτε 8 διαφορετικούς θετικούς ακέραιους αριθμούς ώστε κάθε ένας από αυτούς να διαιρεί το άθροισμα τους. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Προτεινόμενη Λύση

(α) Αυτό μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους: Για παράδειγμα το 1,2,3

(β) Γενικά, αν έχω οποιουσδήποτε αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ και ο καθένας τους διαιρεί το άθροισμα τους το οποίο είναι Σ , τότε και καθένας από τους αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, \Sigma$, θα διαιρεί το άθροισμα τους το οποίο είναι 2Σ .

Με βάση αυτή την παρατήρηση και αρχίζοντας από τους αριθμούς 1,2,3 μπορούμε να βάζουμε ακόμη ένα αριθμό περισσότερο το οποίο και θα είναι το άθροισμα τους. Έτσι έχουμε, 1,2,3,6,12,24,48,96 κτλ.

Είναι φυσικό να υπάρχουν άπειρες λύσεις. Κάποιος μπορεί να ξεκινήσει και με τους αριθμούς 2,4,6 και να συνεχίσει τοποθετώντας κάθε φορά το άθροισμα, όσων αριθμών τοποθετούμε κάθε φορά. Για παράδειγμα, 2,4,6,12,24,48,96,192 κτλ.

Πρόβλημα 3

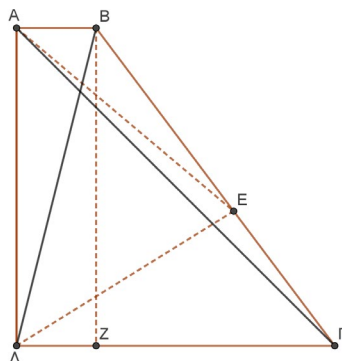
Δίνεται το ορθογώνιο τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$.
Δίνεται επίσης ότι $(AB) = 4$, $(AD) = (\Delta\Gamma) = 16$ και $(BE) = 12$.

(α) Να δείξετε ότι $(\Gamma E) = 8$.

(β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου (ADE) .

Προτεινόμενη Λύση

(α) Από το B φέρουμε κάθετη BZ στην $\Gamma\Delta$. Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο $BZ\Gamma$ έχουμε:



$$(B\Gamma)^2 = (BZ)^2 + (Z\Gamma)^2 \Rightarrow (B\Gamma)^2 = 16^2 + (16 - 4)^2 \Rightarrow (B\Gamma)^2 = 400 \Rightarrow B\Gamma = 20.$$

Άρα, $(\Gamma E) = (B\Gamma) - (BE) = 20 - 12 = 8$

(β) Φέρουμε την AG και έχουμε: $E_{AB\Gamma} = \frac{4 \cdot 16}{2} = 32$ και $E_{ABE} = \frac{12}{20} \cdot E_{AB\Gamma} = \frac{12}{20} \cdot 32 = 19,2$

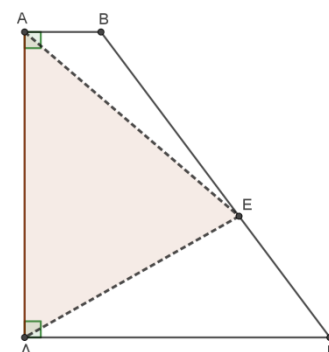
(γ) Φέρουμε την BD και έχουμε: $E_{\Delta B\Gamma} = \frac{16 \cdot 16}{2} = 128$ και $E_{\Gamma\Delta E} = \frac{8}{20} \cdot E_{\Delta B\Gamma} = \frac{8}{20} \cdot 128 = 51,2$

Επομένως το εμβαδόν του τριγώνου ADE θα είναι: $E_{ADE} = E_{AB\Gamma\Delta} - (E_{ABE} + E_{\Gamma\Delta E})$.

$$E_{ADE} = (4 + 16) \cdot \frac{16}{2} - (19,2 + 51,2) = 160 - 70,4 = 89,6$$

Πρόβλημα 4

Να βρείτε όλους τους θετικούς ακераίους οι οποίοι είναι ίσοι με 25 φορές το άθροισμα των ψηφίων τους.



Προτεινόμενη Λύση

Έστω $N = \overline{a_n \dots a_2 a_1 a_0}$.

Τότε $N = a_0 + 10a_1 + 100a_2 + \dots + 10^{n-1}a_n = 25(a_0 + a_1 + \dots + a_n) \Rightarrow$

$$24a_0 + 15a_1 = 75a_2 + 975a_3 + 9975a_4 + \dots$$

Επειδή τα ψηφία $a_0, a_1, a_2, \dots$ είναι ≤ 9 έχουμε,

$$24a_0 + 15a_1 \leq 24 \cdot 9 + 15 \cdot 9 = 39 \cdot 9 < 360$$

Επομένως $a_3 = a_4 = a_5 = \dots = 0$.

Άρα, $24a_0 + 15a_1 = 75a_2 \Rightarrow 8a_0 + 5a_1 = 25a_2 \Rightarrow a_0$ διαιρεί το 5.

Αν $a_0 = 0 \Rightarrow a_1 = 5a_2 \Rightarrow a_2 = 1, a_1 = 5$ και έτσι $N = 150$.

Αν $a_0 = 5 \Rightarrow 8 + a_1 = 5a_2 \Rightarrow a_2 = 2, a_1 = 2$, ή $a_2 = 3, a_1 = 7$ και έτσι $N = 225$ ή $N = 375$.

Δηλαδή όλοι οι αριθμοί είναι : $N = 150, 225$ και 375 .