



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ  
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2019

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ημερομηνία: 21/12/2019

Ώρα Εξέτασης: 09:30-12:30

**ΟΔΗΓΙΕΣ:**

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

**ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ**

**Πρόβλημα 1**

Ο θετικός ακέραιος αριθμός **A** έχει τέσσερα ψηφία.

Ο πενταψήφιος ακέραιος αριθμός B σχηματίζεται τοποθετώντας το ψηφίο 1 μπροστά από τον αριθμό A. Ο πενταψήφιος ακέραιος αριθμός Γ σχηματίζεται τοποθετώντας το ψηφίο 5 στο τέλος του αριθμού A.

Αν ισχύει ότι  $\Gamma = 5B$ , να βρείτε τις δυνατές τιμές του αριθμού A.

**Λύση:**

$$B = 10000 + A$$

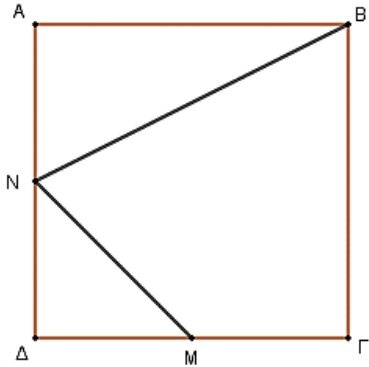
$$\Gamma = 10A + 5$$

$$\Gamma = 5B \Rightarrow 10A + 5 = 5(10000 + A) \Rightarrow$$

$$10A + 5 = 50000 + 5A \Rightarrow 5A = 49995 \Rightarrow A = 9999$$

## Πρόβλημα 2

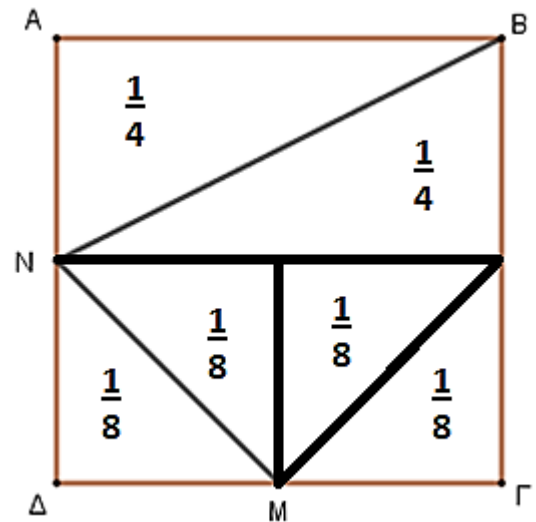
Στο τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$ , το σημείο  $M$  είναι το μέσο του  $\Gamma\Delta$  και το  $N$  είναι το μέσο του  $A\Delta$ . Αν το εμβαδόν του τετράπλευρου  $NB\Gamma M$  είναι 15 τετραγωνικές μονάδες, να βρείτε το εμβαδόν του τετραγώνου  $AB\Gamma\Delta$ .



### Λύση:

Όπως φαίνεται στο σχήμα το  $\frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$  του συνολικού εμβαδού είναι ίσο με 15 τ.μ.

Άρα, το εμβαδόν του τετραγώνου  $ABCD$  είναι ίσο με  $\frac{8}{5} \cdot 15 = 24$  τ.μ.



### Πρόβλημα 3

Έστω  $x$  ο τριψήφιος αριθμός  $AB\Gamma$  και  $y$  ο τριψήφιος αριθμός  $\Gamma BA$ . Τα ψηφία  $A$  και  $\Gamma$  δεν είναι 0. Αν  $x - y = 495$ , πόσες είναι όλες οι δυνατές περιπτώσεις για τον αριθμό  $x$ ;

#### Λύση:

$$x = AB\Gamma = 100A + 10B + \Gamma, \quad y = \Gamma BA = 100\Gamma + 10B + A$$

Άρα,

$$495 = x - y = 99A - 99\Gamma = 99(A - \Gamma) \Rightarrow A - \Gamma = 5$$

Τα πιθανά ζεύγη  $(A, \Gamma)$  είναι:

$$(6,1), (7,2), (8,3), (9,4)$$

Δεν έχουμε κανένα περιορισμό για το ψηφίο  $B$ . Δηλαδή, για κάθε ένα από τα πιο πάνω ζεύγη έχουμε 10 επιλογές για το ψηφίο  $B$  (0, 1, 2, ..., 9). Π.χ. για το ζεύγος (6,1) έχουμε 10 πιθανές περιπτώσεις για τον αριθμό  $x$ : 601, 611, 621, ..., 691. Ομοίως και για τα άλλα τρία ζεύγη. Συνολικά υπάρχουν  $10 \cdot 4 = 40$  δυνατές περιπτώσεις για τον αριθμό  $x$ .

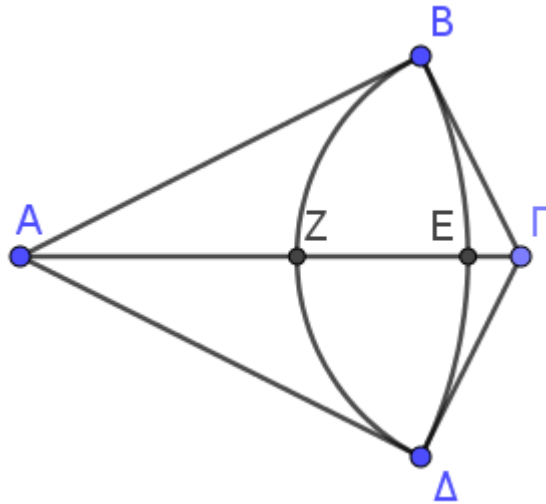
#### Πρόβλημα 4

Δίνεται τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  με τις γωνίες  $B$  και  $\Delta$  να είναι ορθές. Με κέντρα τα  $A$  και  $\Gamma$  και ακτίνες  $AB$  και  $\Gamma B$  γράφουμε τόξα  $B\Delta$  που τέμνουν το  $A\Gamma$  στα σημεία  $E$  και  $Z$  αντίστοιχα.

α) Να δείξετε ότι  $(EZ)^2 = 2(AZ) \cdot (\Gamma E)$

β) Αν  $\Gamma E = \alpha$  και  $Z$  μέσο της  $AE$  να βρεθεί το εμβαδόν και η περίμετρος του  $AB\Gamma\Delta$  συναρτήσει του  $\alpha$

Λύση:



$AB\Gamma$  ορθογώνιο τρίγωνο. Ισχύει το Π.Θ

$$\begin{aligned}(A\Gamma)^2 &= (AB)^2 + (B\Gamma)^2 \\ (AZ + ZE + E\Gamma)^2 &= (AZ + ZE)^2 + (ZE + E\Gamma)^2 \\ (AZ)^2 + (ZE)^2 + (E\Gamma)^2 + 2(AZ)(ZE) + 2(AZ)(E\Gamma) + 2(ZE)(E\Gamma) \\ &= (AZ)^2 + 2(AZ)(ZE) + (ZE)^2 + (ZE)^2 + 2(ZE)(E\Gamma) + (E\Gamma)^2 \\ (ZE)^2 &= 2(AZ)(E\Gamma)\end{aligned}$$

$Z$  μέσο  $AE$  άρα  $ZE=AZ$

Από την σχέση (1)  $(ZE)^2 = 2(ZE)(E\Gamma) \Rightarrow (ZE) = 2(E\Gamma) \Rightarrow ZE = 2\alpha = AZ$

$AB = AZ + ZE = 4\alpha$  και  $\Gamma B = ZE + E\Gamma = 3\alpha$

$$\Pi_{AB\Gamma\Delta} = 2(AB) + 2(\Gamma B) = 2(4\alpha) + 2(3\alpha) = 14\alpha \text{ μονάδες}$$

$$E_{(AB\Gamma\Delta)} = 2E_{(AB\Gamma)} = 2(AB)(B\Gamma)/2 = (4\alpha)(3\alpha) = 12\alpha \text{ τ.μ}$$