



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2019

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ημερομηνία: 02/11/2019

Ώρα Εξέτασης: 14:00-16:00

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Πρόβλημα 1

Αν $x = \frac{6^{17}}{2^{15}} \div 9^8$ και $y = 25^v \div 5^{2v-1}$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{(y^2 - 1)^2}{3x^3} + \frac{(2y - x)^3}{x \cdot y}$$

Προτεινόμενη λύση

Κάνουμε πράξεις για να απλοποιήσουμε όσο μπορούμε τα x και y .

$$x = \frac{6^{17}}{2^{15}} \div 9^8 = \frac{(2 \cdot 3)^{17}}{2^{15}} \div (3^2)^8 = \frac{2^{17} \cdot 3^{17}}{2^{15}} \div 3^{16} = 2^2 \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12$$

$$y = 25^v \div 5^{2v-1} = (5^2)^v \div \frac{5^{2v}}{5^1} = 5^{2v} \cdot \frac{5}{5^{2v}} = 5$$

$$\text{Άρα } A = \frac{(5^2 - 1)^2}{3 \cdot 12^3} + \frac{(2 \cdot 5 - 12)^3}{5 \cdot 12} = \frac{24^2}{3 \cdot 12^3} + \frac{(-2)^3}{60} = \frac{2^2 \cdot 12^2}{3 \cdot 12^3} - \frac{8}{60} = \frac{4}{36} - \frac{2}{15} = \frac{1}{9} - \frac{2}{15} = -\frac{1}{45}$$

Πρόβλημα 2

Ο Μάριος έχει τρία κουτιά στα οποία τοποθετεί τα γραμματόσημά του. Τα δύο δέκατα των γραμματοσήμων του είναι στο πρώτο κουτί, μερικά εβδομα των γραμματοσήμων του βρίσκονται στο δεύτερο κουτί και στο τρίτο κουτί υπάρχουν 303 γραμματόσημα. Να βρείτε το συνολικό αριθμό των γραμματοσήμων του Μάριου.

Προτεινόμενη λύση

Υποθέτουμε πως ο Μάριος έχει x αριθμό γραμματοσήμων.

Άρα από τα δεδομένα μας προκύπτει η εξίσωση

$$\frac{2}{10}x + \frac{a}{7}x + 303 = x, \text{ όπου } a \text{ θετικός ακέραιος μικρότερος του } 6$$

$$\frac{1}{5}x + \frac{a}{7}x + 303 = x \Rightarrow 7x + 5ax + 5 \cdot 7 \cdot 303 = 35x \Rightarrow$$

$$35x - 7x - 5ax = 5 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 101$$

$$(28 - 5a)x = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 101$$

Αφού το x είναι ακέραιος αριθμός τότε το $(28 - 5a)$ διαιρεί ακριβώς το $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 101$

Το a μπορεί να πάρει τιμές από το $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ άρα διακρίνουμε τις πιο κάτω περιπτώσεις

$$\text{Αν } a = 1 \Rightarrow 28 - 5a = 28 - 5 \cdot 1 = 23 \text{ Απορρίπτεται}$$

$$\text{Αν } a = 2 \Rightarrow 28 - 5a = 28 - 5 \cdot 2 = 18 = 6 \cdot 3 \text{ Απορρίπτεται}$$

$$\text{Αν } a = 3 \Rightarrow 28 - 5a = 28 - 5 \cdot 3 = 13 \text{ Απορρίπτεται}$$

$$\text{Αν } a = 4 \Rightarrow 28 - 5a = 28 - 5 \cdot 4 = 8 = 2 \cdot 4 \text{ Απορρίπτεται}$$

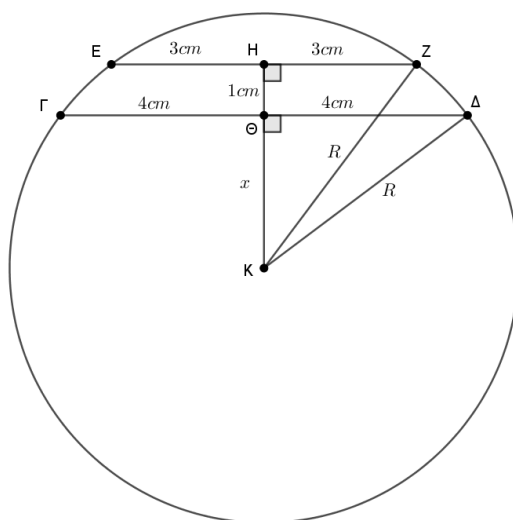
$$\text{Αν } a = 5 \Rightarrow 28 - 5a = 28 - 5 \cdot 5 = 3 \text{ Δεκτή}$$

$$3x = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 101 \Rightarrow x = 3535 \text{ γραμματόσημα}$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται κύκλος (Κ, R) με χορδές $\Gamma\Delta = 8\text{cm}$ και $EZ = 6\text{cm}$ οι οποίες βρίσκονται στο ίδιο ημικύκλιο. Οι χορδές είναι παράλληλες και η μεταξύ τους απόσταση είναι 1cm . Να υπολογίσετε την ακτίνα του κύκλου.

Προτεινόμενη λύση



Από το κέντρο Κ του κύκλου φέρουμε κάθετη προς την ΕΖ και ΓΔ όπως φαίνεται στο σχήμα. Η κάθετη διχοτομεί και τις 2 χορδές από το γνωστό θεώρημα.

Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα στα ορθογώνια τρίγωνα ΚΔΘ και ΚΖΗ.

Τρίγωνο ΚΔΘ:

$$R^2 = 4^2 + x^2, (1)$$

Τρίγωνο ΚΖΗ:

$$R^2 = 3^2 + (x+1)^2, (2)$$

$$\Rightarrow x^2 + 16 = (x+1)^2 + 9 \Rightarrow x^2 + 16 = x^2 + 2x + 1 + 9$$
$$2x = 6 \Rightarrow x = 3 \text{ και άρα } R = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5.$$

Πρόβλημα 4

Έστω x και y διψήφιοι θετικοί ακέραιοι αριθμοί όπου ο y προκύπτει με αντιστροφή των ψηφίων του x . Αν οι x και y ικανοποιούν τη σχέση $x^2 - y^2 = m^2$ για κάποιους θετικούς ακέραιους m να βρείτε το άθροισμα των x , y και m .

Προτεινόμενη λύση

Έστω $x = \overline{a\beta} = 10a + \beta$ τότε $y = \overline{\beta a} = 10\beta + a$ με $a, \beta \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ τότε

Αφού $x^2 - y^2 = m^2$ τότε $(10a + \beta)^2 - (10\beta + a)^2 = m^2$ τότε

$$(10a + \beta + 10\beta + a) \cdot (10a + \beta - 10\beta - a) = m^2 \quad \text{τότε}$$

$$(11a + 11\beta) \cdot (9a - 9\beta) = m^2$$

$$11 \cdot 9 \cdot (a + \beta) \cdot (a - \beta) = m^2$$

Αφού m θετικός ακέραιος τότε το m^2 πρέπει να αναλύεται σε γινόμενο τετραγώνων.

Το $9 = 3^2$ άρα ο ένας από τους παράγοντες $a + \beta$ ή $a - \beta$ πρέπει να είναι ίσος με 11 και ο άλλος ή 1 ή 9. Τα ζεύγη $(9, 2), (8, 3), (7, 4), (6, 5)$ δίνουν άθροισμα 11 αλλά μόνο το $(6, 5)$ δίνει διαφορά 1. Άρα αν $x = 65$ ο $y = 56$ και $m = 11 \cdot 3 = 33$

Τότε το άθροισμα $x + y + m = 65 + 56 + 33 = 154$