



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2020

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ημερομηνία: 07/11/2020

Ώρα Εξέτασης: 10:00-12:00

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Πρόβλημα 1

(α) Έστω η παράσταση

$$A = (3^4)^2 + 3^{10} \cdot 9 + 3^5 \cdot 3^3 - 2 \cdot 3^9$$

Να γράψετε την παράσταση A ως δύναμη του (-3) .

(β) Έστω η παράσταση

$$B = 2^3 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6$$

Να γράψετε την παράσταση B ως δύναμη του 2.

(γ) Να υπολογίσετε την παράσταση

$$\Gamma = 2^{100} - (2^3 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{99})$$

Σημείωση: Μέσα στην παρένθεση εμφανίζεται δύο φορές το 2^3 και από μία φορά κάθε ένα από τα $2^4, 2^5, \dots, 2^{99}$.

Προτεινόμενη Λύση

(α) Είναι

$$\begin{aligned} A &= (3^4)^2 + 3^{10} \cdot 9 + 3^5 \cdot 3^3 - 2 \cdot 3^9 \\ &= 3^8 + 3^{10} \cdot 3^2 + 3^8 - 2 \cdot 3^9 \\ &= 3^8 + 3^8 + 3^8 - 2 \cdot 3^9 \\ &= 3 \cdot 3^8 - 2 \cdot 3^9 \\ &= 3^9 - 2 \cdot 3^9 = -3^9 = (-3)^9 \end{aligned}$$

(β) Πρώτος Τρόπος:

Είναι

$$B = 8 + 8 + 16 + 32 + 64 = 128 = 2^7$$

Δεύτερος Τρόπος:

$$\begin{aligned} B &= (2^3 + 2^3) + 2^4 + 2^5 + 2^6 \\ &= 2^4 + 2^4 + 2^5 + 2^6 \\ &= 2^5 + 2^5 + 2^6 \\ &= 2^6 + 2^6 = 2^7 \end{aligned}$$

(γ) Όπως στο (β) έχουμε:

$$2^3 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{99} = 2^{100}$$

Άρα $\Gamma = 2^{100} - 2^{100} = 0$.

Πρόβλημα 2

Ο Γιώργος έγραψε τον αριθμό 7200 στη μορφή $2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 4^\gamma \cdot 5^\delta$ όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ θετικοί ακέραιοι, έτσι ώστε $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 8$. Να βρείτε τις πιθανές τιμές του γ .

Προτεινόμενη Λύση

Είναι

$$7200 = 8 \cdot 9 \cdot 100 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 2^2 \cdot 5^2 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2$$

Επίσης

$$2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 4^\gamma \cdot 5^\delta = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 2^{2\gamma} \cdot 5^\delta = 2^{\alpha+2\gamma} \cdot 3^\beta \cdot 5^\delta$$

Πρέπει λοιπόν

$$\alpha + 2\gamma = 5, \beta = 2, \delta = 2$$

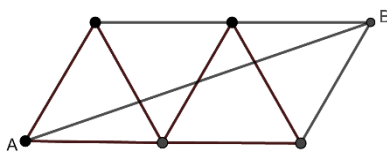
Επίσης $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 8$ άρα $\alpha + \gamma = 4$.

Αφού $\alpha + \gamma = 4$ και $\alpha + 2\gamma = 5$ τότε $5 = \alpha + 2\gamma = (\alpha + \gamma) + \gamma = 4 + \gamma$.

Άρα μοναδική πιθανή για το γ είναι η $\gamma = 1$.

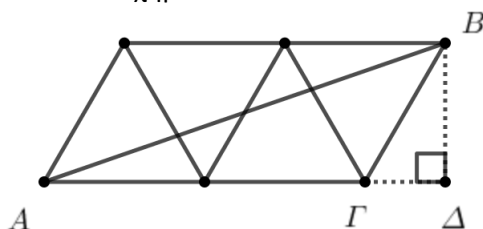
Πρόβλημα 3

Στο πιο κάτω σχήμα τα τέσσερα τρίγωνα είναι ισόπλευρα με πλευρά μήκους 2 cm. Να βρείτε το μήκος του τμήματος AB .



Προτεινόμενη Λύση

Έστω σημεία Γ, Δ όπως φαίνονται στο σχήμα



Είναι $\Gamma\Delta = 1$ cm και $B\Gamma = 2$ cm οπότε από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε

$$B\Delta^2 = B\Gamma^2 - \Gamma\Delta^2 = 4 - 1 = 3$$

Επίσης $A\Delta = 5$ cm οπότε πάλι από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε

$$AB^2 = A\Delta^2 + B\Delta^2 = 25 + 3 = 28$$

Δηλαδή $AB = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$ cm.

Πρόβλημα 4

Ένα τρένο τρέχει με σταθερή ταχύτητα και φθάνει στην είσοδο ενός τούνελ μήκους 3,3 km. Θα χρειαστεί ακριβώς ένα λεπτό από αυτή τη στιγμή για να εξέλθει πλήρως από το τούνελ αλλά θα χρειαστεί μόλις πέντε δευτερόλεπτα για να εισέλθει πλήρως μέσα στο τούνελ.

Να υπολογίσετε το μήκος του τρένου.

Προτεινόμενη Λύση

Πρώτος Τρόπος:

Κάθε πέντε δευτερόλεπτα το πίσω μέρος του τρένου φτάνει εκεί που ήταν η αρχή του τρένου. Από τη στιγμή που το τρένο θα μπει πλήρως μέσα στο τούνελ, χρειάζεται $60 - 5 = 55$ δευτερόλεπτα μέχρι να βγει πλήρως από το τούνελ. Δηλαδή το τούνελ έχει μήκος όσο και $\frac{55}{5} = 11$ τρένα. Άρα το τρένο έχει μήκος ίσο με $\frac{3300}{11} = 300$ m.

Δεύτερος Τρόπος:

Έστω v η ταχύτητα του τρένου σε μέτρα ανά δευτερόλεπτο, και έστω L το μήκος του τρένου σε μέτρα. Τότε έχουμε

$$v = \frac{L + 3300}{60} = \frac{L}{5}$$

Άρα $L + 3300 = 12L$. Επομένως $L = \frac{3300}{11} = 300$ m.

Σημείωση: Το $L + 3300$ είναι η συνολική απόσταση που ταξιδεύει το τρένο σε ένα λεπτό (για να μπει πλήρως μέσα στο τούνελ και μετά να βγει πλήρως από αυτό).