

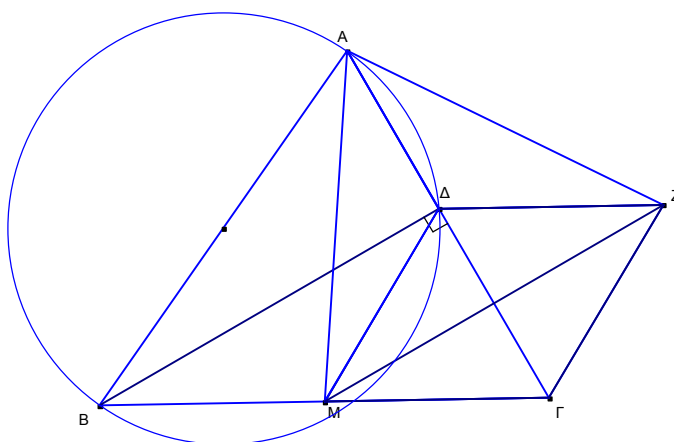


ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2006-07
Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

1. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και M είναι το μέσον της πλευράς $B\Gamma$. Ο κύκλος με διάμετρο την πλευρά AB τέμνει την $A\Gamma$ στο Δ και από το Δ φέρουμε $\Delta Z \parallel M\Gamma$ (το ΔZ βρίσκεται εκτός του τριγώνου). Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραπλεύρου $AM\Gamma Z$ είναι ίσο με το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

ΛΥΣΗ



Αφού ο κύκλος είναι διαμέτρου AB , έχουμε $\angle B\Delta A = 90^\circ$. Άρα $\Delta M = \frac{B\Gamma}{2} = M\Gamma$, και

επειδή $\Delta Z \parallel M\Gamma$, το τετράπλευρο $\Delta M\Gamma Z$ είναι ρόμβος. Επομένως η $\Delta\Gamma$ είναι μεσοκάθετος της MZ . Δηλαδή Το σημείο A βρίσκεται πάνω στην μεσοκάθετη της MZ . Τα τρίγωνα $AZ\Delta$ και $A\Delta M$ είναι ίσα γιατί $AZ=AM$, $A\Delta$ κοινή πλευρά και $\Delta Z=\Delta M$. Άρα $(AM\Gamma Z)=2(AM\Gamma)=(AB\Gamma)$ αφού AM διάμεσος του τριγώνου $AB\Gamma$.

2. Να βρείτε όλους τους τριψήφιους $\overline{xyz}$ ($=100x+10y+z$) για τους οποίους ισχύει

$$\frac{7}{4}(\overline{xyz}) = \overline{zyx}.$$

ΛΥΣΗ

Έχουμε $0 < x < 10$ και $y \geq 0, z < 10$

Τότε η δεδομένη παράσταση γίνεται:

$$\frac{7}{4}(100x+10y+z) = 100z+10y+x \quad \text{ή}$$

$$700x+70y+7z = 400z+40y+x \quad \text{ή}$$

$$696x+30y-393z = 0 \quad \text{ή}$$

$$232x+10y=131z. (1)$$

Άρα $z \equiv 2x \pmod{10} \Leftrightarrow z = 2x + 10m, m \in \mathbb{Z}$.

Επομένως η (1) γίνεται:

$$232x+10y=131(2x+10m) \quad \text{ή}$$

$$232x+10y=262x+1310m \quad \text{ή}$$

$$10y=30x+1310k, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{ή}$$

$$y=3x+131k.$$

Αφού όμως $0 < x < 10$ και $0 \leq y < 10$ έπεται ότι $k=0$ και άρα $y=3x$.

Η (1) τώρα γράφεται:

$$232x+30x=131z \quad \text{ή} \quad 262x=131z \Leftrightarrow z=2x.$$

Άρα οι τριψήφιοι αριθμοί που ζητάμε είναι 132, 264, 396.

3. α) Να μετατρέψετε την παράσταση $A = \eta\mu(x-y) + \eta\mu(y-z) + \eta\mu(z-x)$ σε γινόμενο.

β) Να αποδείξετε ότι: αν σε τρίγωνο ABΓ ισχύει

$$\alpha\sigma\upsilon\nu B + \beta\sigma\upsilon\nu\Gamma + \gamma\sigma\upsilon\nu A = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}, \text{ το τρίγωνο είναι ισοσκελές.}$$

ΛΥΣΗ

(α) Έχουμε $\eta\mu(x-y) + \eta\mu(y-z) = 2\eta\mu \frac{x-z}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{x+z-2y}{2}$ και

$$\eta\mu(z-x) = 2\eta\mu \frac{z-x}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{z-x}{2}.$$

$$\eta\mu(x-y) + \eta\mu(y-z) + \eta\mu(z-x) = 2\eta\mu \frac{x-z}{2} \left[\sigma\upsilon\nu \frac{x+z-2y}{2} - \sigma\upsilon\nu \frac{z-x}{2} \right] =$$

Άρα

$$= -4\eta\mu \frac{x-z}{2} \eta\mu \frac{z-y}{2} \eta\mu \frac{x-y}{2} = -4\eta\mu \frac{x-y}{2} \eta\mu \frac{y-z}{2} \eta\mu \frac{z-x}{2}.$$

(β) Από τον νόμο των ημιτόνων η δεδομένη παράσταση γράφεται:

$$2R\eta\mu A\sigma\upsilon\nu B + 2R\eta\mu B\sigma\upsilon\nu\Gamma + 2R\eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu A = \frac{2R(\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu\Gamma)}{2} \text{ ή}$$

$$2\eta\mu A\sigma\upsilon\nu B + 2\eta\mu B\sigma\upsilon\nu\Gamma + 2\eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu A = \eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu\Gamma \text{ ή}$$

$$\eta\mu(A+B) + \eta\mu(A-B) + \eta\mu(B+\Gamma) + \eta\mu(B-\Gamma) + \eta\mu(\Gamma+A) + \eta\mu(\Gamma-A) = \\ = \eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu\Gamma$$

Επειδή όμως $A+B+\Gamma = 180^\circ$, έχουμε: $\eta\mu(A+B) = \eta\mu\Gamma$, $\eta\mu(B+\Gamma) = \eta\mu A$
 $\eta\mu(\Gamma+A) = \eta\mu B$.

Άρα η τελευταία παράσταση γράφεται:

$$\eta\mu(A-B) + \eta\mu(B-\Gamma) + \eta\mu(\Gamma-A) = 0$$

και από το (α) έχουμε:

$$\eta\mu(A-B) + \eta\mu(B-\Gamma) + \eta\mu(\Gamma-A) = 4\eta\mu \frac{A-B}{2} \eta\mu \frac{B-\Gamma}{2} \eta\mu \frac{\Gamma-A}{2} = 0$$

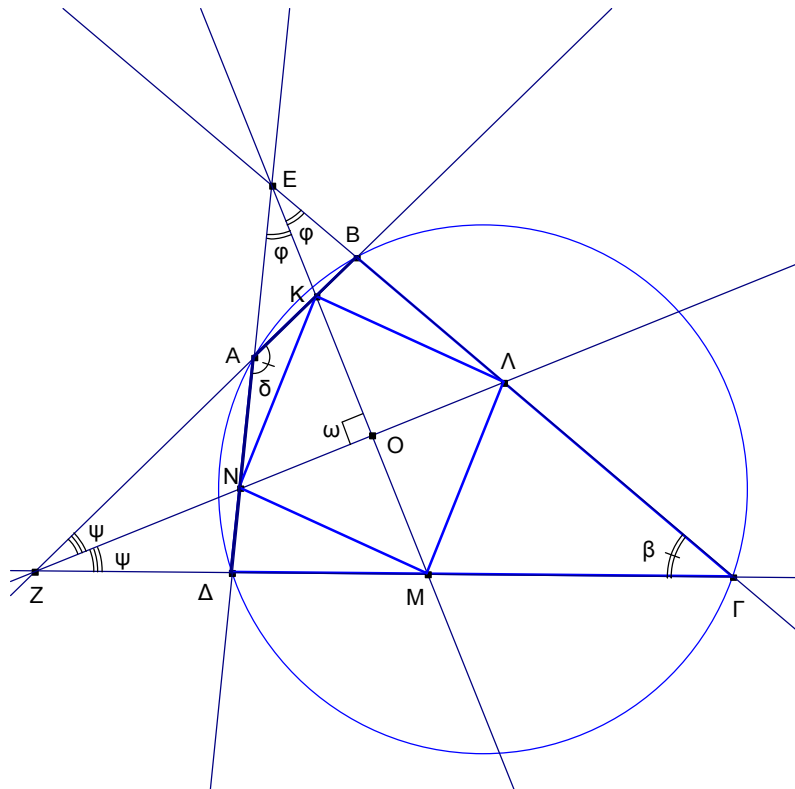
άρα $A=B$ ή $B=\Gamma$ ή $\Gamma=A$. Δηλαδή το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές.

4. Τετράπλευρο ΑΒΓΔ, που δεν έχει παράλληλες πλευρές, είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο, οι πλευρές του ΔΑ, ΓΒ τέμνονται στο Ε και οι πλευρές του ΒΑ, ΓΔ τέμνονται στο Ζ.

Αν οι διχοτόμοι των $\angle ΔΕΓ$ και $\angle ΓΖΒ$ τέμνουν τις πλευρές του τετραπλεύρου στα σημεία Κ, Λ, Μ, Ν να αποδείξετε ότι

- α) οι δυο διχοτόμοι τέμνονται κάθετα
β) τα σημεία Κ, Λ, Μ, Ν είναι κορυφές ρόμβου.

ΛΥΣΗ



- (α) Από τα τετράπλευρα ΟΕΑΖ και ΟΖΓΕ έχουμε:

$\omega + \varphi + (360^\circ - \delta) + \psi = 360^\circ$ και $(360^\circ - \omega) + \psi + \beta + \varphi = 360^\circ$. Αφαιρώντας τις δύο ισότητες παίρνουμε: $2\omega = \beta + \delta$. Επειδή όμως το ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο έχουμε $2\omega = 180^\circ \Rightarrow \omega = 90^\circ$.

- (β) Τα τρίγωνα ΖΜΟ και ΖΟΚ είναι ίσα. Επίσης τα τρίγωνα ΕΟΝ και ΕΟΛ είναι ίσα. Άρα $ΟΜ = ΟΚ$ και $ΟΛ = ΟΝ$. Οι διχοτόμοι του τετραπλεύρου ΚΛΜΝ διχοτομούνται και τέμνονται κάθετα άρα είναι ρόμβος.

5. Πενήντα άτομα, εικοσιπέντε αγόρια και εικοσιπέντε κορίτσια κάθονται γύρω από ένα τραπέζι. Να αποδείξετε ότι υπάρχει πάντα ένα άτομο από τα 50, που κάθεται μεταξύ δυο κοριτσιών.

ΛΥΣΗ

Χρησιμοποιώντας την μέθοδο την εις άτοπο απαγωγής, υποθέτουμε ότι κανένα άτομο δεν κάθεται μεταξύ δύο κοριτσιών.

Ονομάζουμε *μπλόκ* κάθε ομάδα κοριτσιών (αγοριών) που κάθονται ο ένας μετά τον άλλο και από τις δύο πλευρές περικλείονται από αγόρια (κορίτσια).

Με αυτή την υπόθεση τα δυνατά *μπλόκ κοριτσιών* που μπορούν να σχηματιστούν για να καθίσουν με αυτό τον τρόπο είναι:

ΑΚΑ ή ΑΚΚΑ. Άρα κάθε *μπλόκ κοριτσιών* έχει το πολύ 2 κορίτσια και υπάρχουν τουλάχιστον δυο αγόρια στα κενά ανάμεσα σε δυο συνεχόμενα *μπλόκ κοριτσιών* για παράδειγμα ΑΚΚΑ-ΑΚΚΑ-ΑΚΚΑ κ.λ.π. Στις θέσεις που υπάρχει η γραμμή πρέπει υποχρεωτικά να καθίσει αγόρι.

Άρα υπάρχουν τουλάχιστον $\left\lceil \frac{25}{2} \right\rceil = 13$ *μπλόκ κοριτσιών* και τουλάχιστον

$2 \cdot 13$ αγόρια κάθονται ανάμεσα των δεκατριών κενών των *μπλόκ των κοριτσιών*.

Αλλά μόνο 25 αγόρια υπάρχουν, άτοπο. Επομένως η υπόθεσή μας είναι λάθος.

Επομένως υπάρχει πάντα ένα άτομο από τα 50, που κάθεται μεταξύ δυο κοριτσιών.